Аверсэв

В. В. Казаков

Наглядная геометрия

Подготовка к ЦТ

Ключевые задачи с решениями

Повторение геометрии за 7–11 классы

500 задач на готовых чертежах

11 класс

геометрия

В. В. Казаков

Наглядная геометрия

11 класс

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения

Рекомендовано Научно-методическим учреждением «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь

Минск
«Аверсэв»
2014

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
К14

Рецензенты:
каф. алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений учреждения образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова» (канд. физ.-мат. наук, доц. ***Б. Д. Чеботаревский***); преподаватель математики высшей категории учреждения образования «Минское суворовское военное училище» ***И. Г. Арефьева***; методист отдела научно-методического обеспечения общего среднего образования УО «Республиканский институт профессионального образования» ***Т. П. Валченко***

Казаков, В. В.
К14 Наглядная геометрия. 11 класс : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Казаков. — Минск : Аверсэв, 2014. — 127 с. : ил.
ISBN 978-985-19-1179-6.

Данное пособие полностью соответствует программе по математике для средней школы и программе для поступающих в вузы, а также учебным пособиям по геометрии. Оно содержит все необходимые теоретические сведения по предмету за 7—11 классы, важнейшие задачи с решениями и задачи на готовых чертежах.

Издание поможет в кратчайшие сроки обобщить и систематизировать знания по геометрии и таким образом подготовиться к школьному экзамену или централизованному тестированию.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-19-1179-6

Содержание

От автора

УВАЖАЕМЫЕ РЕБЯТА!

Вы подошли к заключительному этапу изучения математики в школе. После его окончания всем вам предстоит сдать выпускной экзамен, а многим — пройти централизованное тестирование для поступления в вуз. Хочется, чтобы и то, и другое вы сделали успешно. Поэтому данная книга, без сомнения, для вас!

О геометрических задачах

Задачи по геометрии всегда считались наиболее трудными. Все дело в том, что в геометрии имеется большое разнообразие фигур, а значит, и их свойств. Знать, помнить все эти свойства и уметь применять при решении задач — большое искусство.

О важности повторения

Данная книга призвана помочь вам в этом. В конце книги размещен материал для повторения по всему курсу геометрии. Причем повторение ведется по классам: с 7 по 11 — именно так, как вы и изучали геометрию в школе. Поэтому, прежде чем приступать к изучению стереометрии 11 класса, советуем вам вспомнить пройденный материал, изучив содержание раздела «Повторение» за 7—11 классы. Если вы в предыдущих классах изучали геометрию при помощи пособий «Наглядная геометрия» В. В. Казакова, то сделать вам это будет значительно легче.

О данной книге

Пособие «Наглядная геометрия. 11 класс» В. В. Казакова является интерактивным приложением к действующим учебникам по геометрии для 11 класса В. В. Шлыкова, а также Л. А. Латотина и Б. Д. Чеботаревского. Оно может использоваться и как самостоятельное пособие для изучения геометрии и подготовки к ЦТ, поскольку полностью соответствует программе по математике, содержит необходимые геометрические сведения и рекомендовано научно-методическим учреждением «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь.

УВАЖАЕМЫЕ УЧИТЕЛЯ!

О геометрии в 11 классе

Геометрия 11 класса — формульная. Десяток логически понятных и связанных формул. Работает принцип аналогии как по горизонтали (призма — цилиндр, пирамида — конус), так и по вертикали (планиметрия — стереометрия). Основной упор данной книги — подготовка к ЦТ. Так уж сложилось, что именно результаты ваших учеников на ЦТ становятся вашими главными результатами. По ним будут судить о вашем учительском мастерстве. Наверное, это несправедливо. Ведь честность поступков, искренность сердца, взлеты души, которые вы дали своим ученикам, — это как оценить? Но все это для потомков. А сегодня нужно показать лучший результат!

О повторении геометрии

Важно правильно и эффективно организовать повторение. В основе расчетной геометрии — формулы площадей плоских фигур. С этого следует начать повторение. Затем рассматриваются площади поверхностей пространственных тел, и количество задач значительно возрастает. И наконец финал — объемы геометрических тел. Нужно постараться сделать каркас из разрозненных геометрических сведений. Этому способствует важнейший раздел данного пособия под названием «Повторение». Он содержит итоговые опорные конспекты «Наглядных геометрий» для 7—11 классов В. В. Казакова, а также краткие теоретические сведения (квинтэссенции) по курсу геометрии для каждого из 7—11 классов. Если вы работали с учениками по этим пособиям, то повторение будет самым эффективным. В течение первых 3—4 уроков следует бегло повторить указанный материал. В процессе решения предложенных ключевых задач и задач на готовых чертежах также будет осуществляться непрерывное повторение пройденного учебного материала.

В пособии использована технология крупноблочного изучения математики, которая описана в предисловиях к «Наглядной геометрии» для 7—10 классов, а также на сайте издательства «Аверсэв» (www.aversev.by).

Кратко опишем возможную технологию работы с пособием «Наглядная геометрия. 11 класс» В. В. Казакова.

Идеальный вариант — все учащиеся класса имеют данное пособие!

Курс стереометрии 11 класса содержит три темы (раздела):

Тема 1. **Многогранники.**
Тема 2. **Объемы многогранников.**
Тема 3. **Тела вращения.**

Тема 4. **Вписанные и описанные шары.** Дополнительная тема и предназначена для учеников, сдающих ЦТ по математике.

Для каждой темы 1—3 в нашем пособии имеется:
1) основной материал — расположен в центральной части страницы теории;
2) вспомогательный материал — расположен по периметру страницы на сером фоне;
3) ключевые задачи, содержащие образцы решения основных задач темы;
4) задачи для решения на готовых чертежах в двух вариантах.

Внимание!

• К каждой теме даны контрольные вопросы. Ответы на них содержатся в тексте теории.

• К каждой теме даны система устных развивающих заданий-вопросов под рубрикой «Простые и непростые вопросы» и ответы на них.

• К каждой теме даны задачи для учеников, сдающих ЦТ по математике. Эти задачи предназначены как для самоподготовки учеников, так и для факультативных занятий.

• Каждая тема завершается контрольной работой в двух вариантах.

Кратко рассмотрим обучение по данной технологии на примере раздела «Многогранники».

1-й урок. Учитель: излагает теорию по теме «Призма — параллелепипед», доказывает теоремы 1—3.
Ученики: слушают рассказ.
Д. з. Выучить ответы на вопросы 1—11.

2-й урок. Ученики: по группам у доски отвечают на вопросы 1—11.
Учитель: в конце урока решаются две ключевые задачи из пособия (без записи в тетрадь).
Д. з. Все четные задачи: № 2—64. Обязательные: № 2—16 (решают прямо в пособии с краткой записью решения и ответа).

3-й урок. Учитель: решение оставшихся четырех ключевых задач из пособия (без записи в тетрадь).
Ученики: полуустное решение задач под нечетными номерами: № 1, 3, 5, 7, 11, 15, 17, 21, 23*. № 17 — кратко в тетрадь.
Д. з. Четные: до № 64. Обязательные: № 18—32.

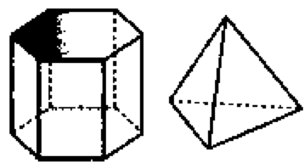
4-й урок. Учитель: повторение доказательства теорем 1—3 (в парах).
Ученики: полуустное решение задач под нечетными номерами: № 19, 25, 27, 33, 37, 39, 43, 47, 53, 55, 57. Запись решения № 53 кратко в тетрадь.
Д. з. Четные: до № 64. Обязательные: № 34—48.

Уроки 5—8 по теме «Пирамида» проходят аналогично.
Урок 9. Тема «Правильные многогранники». Подготовка класса к зачету по теме «Многогранники». Учитель отвечает на все вопросы по данной теме. Домашнее задание: знать ответы на все! 24 вопроса темы (теоремы с доказательством).
Урок 10. Сдача зачета по теме (по группам у доски).
Урок 11. Проверочная работа по домашним заданиям. Каждому ученику предлагается решить пять задач под четными номерами из числа заданных на дом за период изучения раздела.
Урок 12. Плановая контрольная работа «Многогранники».

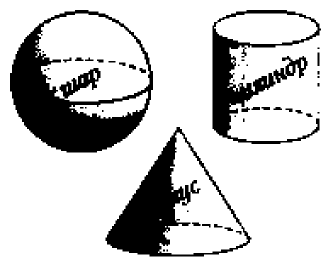
Резерв времени 5 часов! Можно начать изучение очередной темы с последующим возвратом к решению задач по предыдущим темам. Можно организовать решение оставшихся задач по теме из данного пособия или из учебника.

Все, что предстоит изучить в 11 классе, — на двух страницах!

Призма и пирамида



Тела вращения

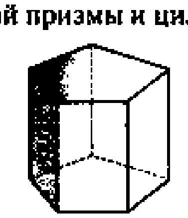


«Наглядная геометрия. 11 класс» завершает школьную серию наглядной геометрии. Здесь вы еще раз встретитесь с двумя **видами** многогранников — ***призмой*** и ***пирамидой***, вспомните формулы нахождения площади их поверхности (они были даны в 10 классе), узнаете формулы нахождения объемов этих многогранников.

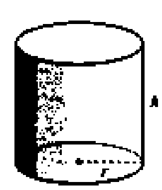
Вам предстоит изучить так называемые круглые тела, или тела вращения: *шар*, знакомый с детства, *сферу* как поверхность шара, *цилиндр* — такую шляпу носили во времена Пушкина, и *конус*, что с древнегреческого переводится как «шишка».

Таким образом, наступает пора расчетной, или вычислительной, геометрии. «Найти площадь поверхности правильной треугольной призмы, если даны...», «Найти объем конуса, у которого известны...» и т. п. — такая тематика задач является преобладающей в 11 классе. Поэтому прочное знание формул площадей поверхностей геометрических тел и их объемов становится важнейшей задачей. Тем более что этих формул-то, по сути, всего шесть! Это: формула площади боковой поверхности прямой призмы и цилиндра (1), формула объема призмы и цилиндра (2), формула площади боковой поверхности правильной пирамиды и конуса (3), формула объема пирамиды и конуса (4), формула площади поверхности шара (5) и формула объема шара (6). Познакомимся с ними прямо сейчас.

Площадь боковой поверхности прямой призмы и цилиндра



$S_{\text{бок призмы}} = P_{\text{осн}} \cdot h$



$S_{\text{бок цил}} = P_{\text{осн}} \cdot h = 2\pi r \cdot h$

Формула № 1

Площадь боковой поверхности прямой призмы (боковое ребро перпендикулярно основанию) и цилиндра находится по одной и той же формуле как произведение периметра основания на высоту. Так, $S_{\text{бок призмы}} = P_{\text{осн}} \cdot h$. Периметром основания цилиндра является длина окружности основания. Поэтому $S_{\text{бок цил}} = P_{\text{осн}} \cdot h = 2\pi r \cdot h$.

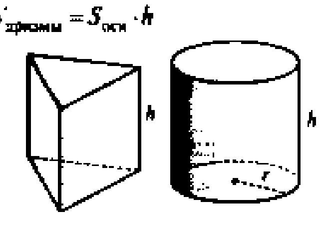
Кстати, слово «периметр» происходит от древнегреческого «периметрон» — окружность.

Для нахождения полной поверхности цилиндра нужно добавить к боковой поверхности еще площади двух его оснований — двух кругов одного радиуса. То, что площадь круга находится по формуле $S = \pi r^2$, известно еще с младших классов. Поэтому площадь полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн цил}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Это — не новая формула, а выводимая по простым и ясным соображениям только от представления формы данного геометрического тела — цилиндра. То же самое можно сказать о призме с ее двумя равными основаниями: $S_{\text{полн призмы}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. Площади оснований призмы — многоугольников — находятся по известным формулам планиметрии, которые мы повторим чуть позже.

Объем призмы и цилиндра

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h$



$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$

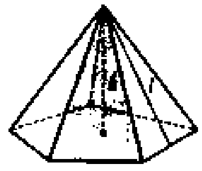
Формула № 2

Итак, уже есть формулы боковых поверхностей прямой призмы и цилиндра. Эти два тела имеют, если можно так сказать, один тип формы. Если количество сторон основания правильной призмы увеличивать до бесконечности, то она начнет «превращаться» в цилиндр (т. е. боковая поверхность призмы будет стремиться к боковой поверхности цилиндра, а площадь основания (многоугольника) будет приближаться к площади круга).

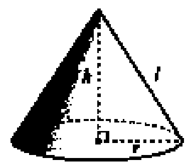
Поэтому и объемы этих тел находятся одинаково, как произведение площади основания на высоту. Причем так же находится объем наклонной призмы!

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h$ — объем призмы, $V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$ — объем цилиндра.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и конуса



$S_{\text{бок прав пир}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$



$S_{\text{бок кон}} = \pi r l$

Формула № 3

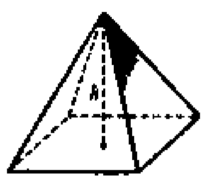
Еще два тела имеют сходный тип формы: правильная пирамида и конус. Пирамида — это в Египте, а конус — это куча песка, рупор, вафельный рожок для мягкого мороженого. Поверхность конуса состоит из круга и всех отрезков, которые соединяют точки окружности этого круга с точкой на перпендикуляре, восстановленном в центре данного круга. Эти отрезки образуют боковую поверхность конуса, поэтому они называются образующими конуса и обозначаются латинской буковой «эль», т. е. l или L. У правильной пирамиды буквой l обозначается апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины к ребру основания.

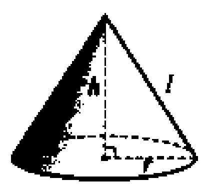
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и конуса находится как половина произведения периметра основания на высоту, проведенную в боковой грани призмы к ребру основания:

$$S_{\text{бок прав пир}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l;$$

$$S_{\text{бок кон}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi r l.$$

Объем пирамиды и конуса





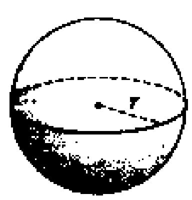
$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

Формула № 4

Если количество сторон правильной пирамиды увеличивать до бесконечности, то она начнет «превращаться» в конус. Поэтому объемы конуса и пирамиды, причем не только правильной, но и произвольной, находятся одинаково — как произведение одной трети площади основания на высоту.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h \text{ — объем пирамиды,}$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ — объем цилиндра.}$$



$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$

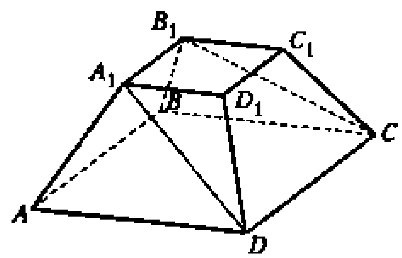
$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$

Формулы № 5 и № 6

Площадь поверхности шара, или площадь сферы, находится по формуле $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$. Объем шара находится по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Указанные шесть формул охватывают большую часть задач по стереометрии на нахождение площадей поверхностей и объемов геометрических тел. Вы спросите, а зачем же тогда еще что-то изучать? Достаточно запомнить эти шесть формул, чтобы решать задачи. Да, чтобы сдать выпускной экзамен по математике, этих знаний вполне достаточно. Возможно, следует еще добавить немного совсем уж очевидных сведений, например, что осевое сечение цилиндра — прямоугольник; осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник; что если провести сечение, параллельное основанию пирамиды, то получим усеченную пирамиду, объем которой находится как разность объемов данной пирамиды и пирамиды, отсеченной плоскостью. Перечисленные факты, сведения легко усваиваются в процессе решения задач. Для решения некоторых из них достаточно здравого смысла. Например, для нахождения площади боковой поверхности призмы можно найти площадь каждой боковой грани и полученные результаты сложить. То же касается площади боковой поверхности пирамиды. Для правильной же пирамиды достаточно найти площадь одной боковой грани и умножить на количество граней, так как у правильной пирамиды боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

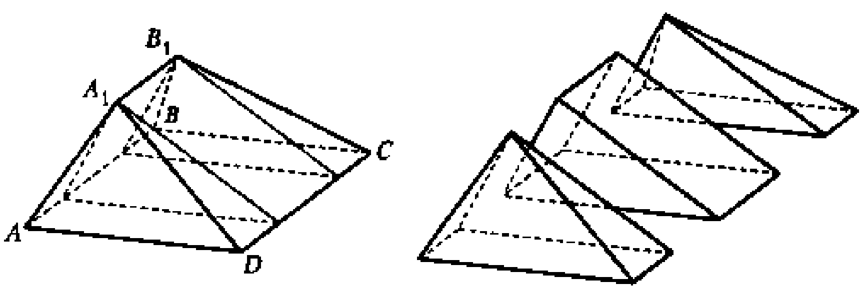
Для учащихся, сдающих ЦТ по математике



Указанные выше сведения о площадях поверхностей и объемах геометрических тел — это достаточно простой учебный материал. Для того чтобы сдать успешно экзамен на централизованном тестировании, понадобится глубокое знание теории. Например, не так давно на ЦТ была предложена следующая задача.

«Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 и 4. Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. Найдите, в каком отношении плоскость делит объем пирамиды».

Указанная секущая плоскость DA_1B_1C делит данную усеченную пирамиду на два многогранника $ABCDA_1B_1$ и $A_1B_1C_1D_1DC$, которые имеют форму клина. В современной школе такие фигуры не изучаются. Для того чтобы решить данную задачу, нужно суметь разбить клин на уже известные геометрические тела: призму и пирамиду. Например, многогранник $ABCDA_1B_1$ можно разбить двумя параллельными плоскостями на прямую треугольную призму и две четырехугольные пирамиды, как показано на рисунке.



О пользе изучения доказательств теорем

Умение видеть подобные разбиения формируется при изучении теорем, способов вывода формул объема. Так, чтобы вывести формулу объема произвольной n-угольной призмы, нужно ее разбить на треугольные призмы; чтобы вывести формулу объема наклонного параллелепипеда, его нужно разбить на части, из которых можно сложить прямоугольный параллелепипед.

Поэтому изучение доказательств теорем и выводов формул является важным элементом обучения решению задач. Усваивая теоретические рассуждения, вы приобретаете умение решать задачи! Ввиду сказанного в данной книге присутствуют практически все теоретические выкладки, необходимые для вывода формул объемов геометрических тел и площадей их поверхностей. Некоторые рассуждения не являются строгими в математическом плане. Однако их достаточно, чтобы прийти к правильным выводам. Так, например, для вывода формулы объема цилиндра в него вписывают правильную призму и увеличивают бесконечно количество сторон ее основания. Тогда объем призмы, который известен и равен произведению площади основания на высоту, будет стремиться к объему цилиндра, а площадь основания призмы — к площади основания цилиндра. Поскольку высота у призмы и цилиндра одинаковая, то объем цилиндра естественно принять как произведение площади его основания на высоту. Такие процессы, связанные с бесконечным увеличением числа сторон основания призмы, рассматриваются в высшей математике, которую вы будете изучать уже на первом курсе университета. Поэтому знакомство с подобными рассуждениями весьма полезно для будущего студента.

УВАЖАЕМЫЕ РОДИТЕЛИ!

О советах

Вы и не думали, что так быстро повзрослеет ваш ребенок. И вот ему уже предстоит сдавать школьные экзамены и ЦТ по математике для поступления в вуз. Это очень важный этап в его жизни. Возможно, самый важный! От этого может зависеть его судьба, вся дальнейшая жизнь. И ничего важнее вашего ребенка и его успехов на свете нет. Это бесспорно. Как помочь, как сделать так, чтобы ребенку сопутствовал успех?

У Сократа как-то спросили: «Что легче всего на свете?» — «Давать советы», — ответил мудрец. «А что труднее всего?» — «Следовать им!» И все же я рискну. И дам несколько советов.

О самостоятельной работе

Школьный учитель математики лучше других знает математические способности вашего ребенка и может подсказать вам, как организовать работу по подготовке к ЦТ. Если ребенок имеет по математике 7—9 баллов, то простейшим выбором будут подготовительные курсы в ближайшем вузе. Но самое главное — это желание вашего ребенка приложить усилия к усвоению математических знаний, их систематизации, а также его умение мобилизоваться для напряженной работы.

Режим учебы в 11 классе должен быть особым. Большая доля работы ученика является самостоятельной. Самообучение может быть эффективным, если ученик довольствуется не только учебником, но и различными полезными приложениями к нему. Именно самоподготовка играет важнейшую роль при обучении в вузе.

О геометрии

Стереометрия — очень сложный для сегодняшних учеников раздел математики. Этому есть целый ряд объективных причин. Тем не менее каждый год на ЦТ по математике предлагается 3—4 задачи по стереометрии. И это серьезные задачи, решение которых приносит значительное количество баллов абитуриенту. Поэтому немаловажным фактором является дополнительная литература для подготовки к экзамену. Здесь выбор широчайший. Как правило, литературу для подготовки советует учитель, индивидуальный репетитор или преподаватель на курсах.

Мнение автора о данной книге

Относительно данной книги могу сказать вам следующее. Для подготовки учащихся к ЦТ и одновременно для повышения балла по математике в школе книга является действительно очень хорошим выбором. Это я говорю абсолютно честно, как автор, которому данная книга самому понравилась.

Я желаю вам реализации ваших планов. Если вы читаете эти строки, то значит, вы всерьез беспокоитесь о профессиональном будущем ваших детей. А значит, все у вас будет хорошо.

С уважением, Валерий Владимирович Казаков.

Экспресс-повторение

Для успешного решения задач на нахождение площадей поверхностей и объемов геометрических тел необходимо хорошо помнить все геометрические формулы. Они составляют вашу базу знаний.

Полная база знаний по геометрии находится в конце книги. Здесь же мы напомним наиболее часто встречающиеся формулы, необходимые при решении основных задач по стереометрии 11 класса.

Равносторонний треугольник

$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — формула площади, где a — сторона треугольника.

$h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ — формула высоты (медианы, биссектрисы).

$a=R\sqrt{3}$, или $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ — радиус описанной окружности.

$a=2r\sqrt{3}$, или $r=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{R}{2}$ — радиус вписанной окружности.

Квадрат

$d=a\sqrt{2}$, или $a=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$, — формулы, связывающие диагональ и сторону.

$R=\dfrac{d}{2}$ и $r=\dfrac{a}{2}$ — радиус описанной и вписанной окружностей.

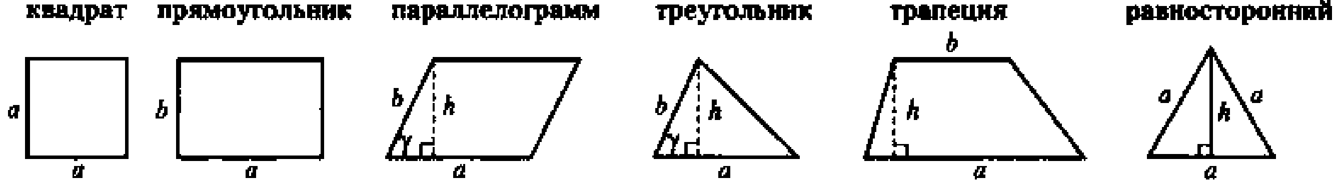
Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора обратная: если для чисел a, b, c верно равенство $a^2+b^2=c^2$, то a, b, c — длины сторон прямоугольного треугольника. Например, 6, 8 и 10.

$h=\dfrac{ab}{c}$ — высота, опущенная на гипотенузу, $R=\dfrac{c}{2}$, $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.

ПЛОЩАДИ

квадрат | прямоугольник | параллелограмм | треугольник | трапеция | равносторонний



квадрат: $\boxed{S=a^2}$

прямоугольник: $\boxed{S=ab}$

параллелограмм: $\boxed{\begin{gathered}S=ah\\ S=ab\sin\gamma\end{gathered}}$

треугольник:

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}ah$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ формула Герона

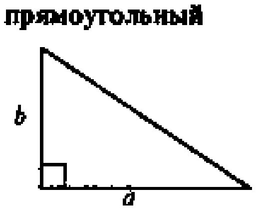
$S_\Delta=pr$

$S_\Delta=\dfrac{abc}{4R}$

трапеция: $\boxed{S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h}$

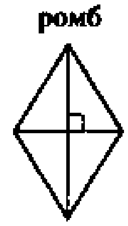
равносторонний: $\boxed{S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

прямоугольный

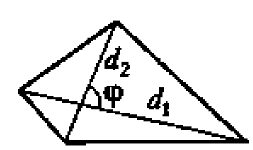


$\boxed{S=\dfrac{ab}{2}}$

ромб



$\boxed{S=\dfrac{d_1d_2}{2}}$



произвольный 4-к $\boxed{S=\dfrac{d_1d_2}{2}\sin\varphi}$

ТЕМА 1

МНОГОГРАННИКИ

Л. Дербенев

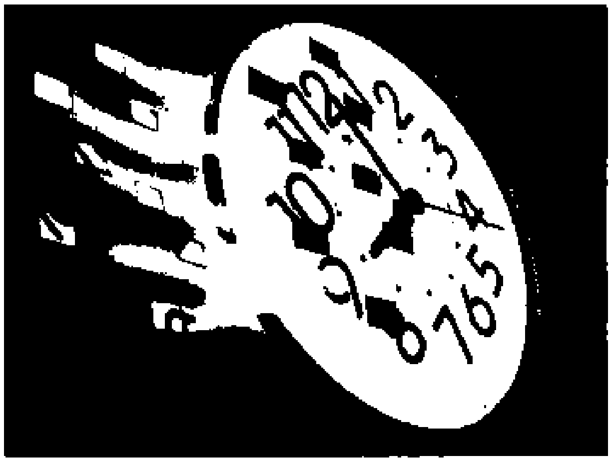
Есть только миг*

Призрачно все в этом мире бушующем.
Есть только миг — за него и держись.
Есть только миг между прошлым и будущим.
Именно он называется жизнь.

Вечный покой сердце вряд ли обрадует.
Вечный покой для седых пирамид,
А для звезды, что сорвалась и падает,
Есть только миг — ослепительный миг.

Пусть этот мир вдаль летит сквозь столетия.
Но не всегда по дороге мне с ним.
Чем дорожу, чем рискую на свете я —
Мигом одним — только мигом одним.

Счастье дано повстречать иль беду еще,
Есть только миг — за него и держись.
Есть только миг между прошлым и будущим.
Именно он называется жизнь.



* http://www.moskva.fm/artist/олег_анофриев/song_981831

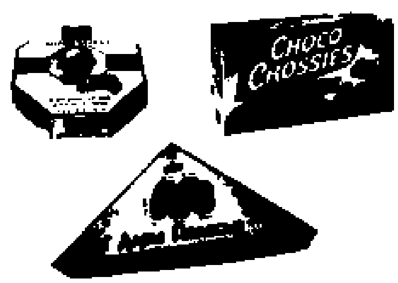
МНОГОГРАННИКИ

Что изучается в данной теме?

В 10 классе вы познакомились с многогранниками (много граней). Многогранник — геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников. В этой теме мы повторим и систематизируем знания о многогранниках. В школе основательно изучаются всего два многогранника: **призма** и **пирамида**. Еще рассматривается *параллелепипед* — призма, в основании которой лежит параллелограмм. Простейший параллелепипед вам знаком с 1 класса — это прямоугольный параллелепипед. Форму прямоугольного параллелепипеда имеют коробки для обуви, системный блок компьютера и т. п.

Что нужно знать о призме?

Что такое призма? Какие призмы бывают? Какие у них свойства?

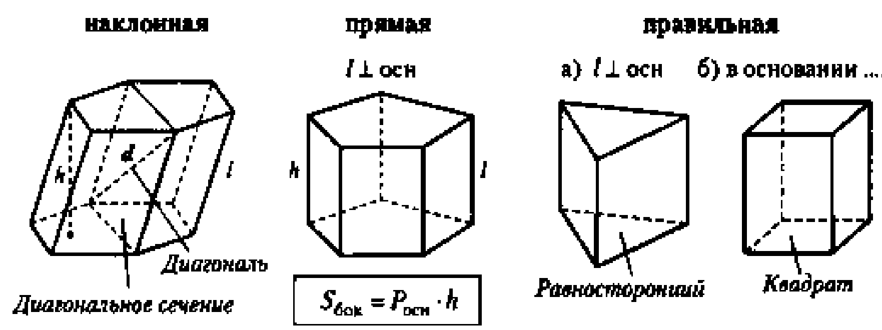


Призму можно представить как коробку конфет.

Призма — это многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (эти грани называются основаниями призмы), а остальные n граней — параллелограммы (они называются боковыми гранями).

Призмы бывают *наклонные*, *прямые* и *правильные*. У прямых призм боковое ребро перпендикулярно основанию, а у правильных, кроме того, в основании лежит правильный многоугольник (равносторонний треугольник, квадрат и т. д.).

Призма



Наклонная призма

Основания — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.
Боковые грани — параллелограммы.
Высота призмы — перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего.
Боковые ребра призмы равны и параллельны.
Диагональ призмы соединяет две вершины, не лежащие в одной грани.
Диагональное сечение проходит через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, и является параллелограммом.
Площадь боковой поверхности равна сумме площадей боковых граней: $S_{бок} = S_1 + S_2 + ... + S_n$.
Площадь полной поверхности равна сумме площади боковой поверхности и двух площадей оснований: $S_{осн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

Прямая призма

Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны основаниям.
Боковые грани прямой призмы — прямоугольники.
Высота прямой призмы равна боковому ребру: $h = l$.

Теорема 1. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту (на боковое ребро).*

<u>Доказательство.</u> Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Площадь каждого равна произведению какой-то стороны основания призмы на высоту. Если $a, b, c, d, ...$ — это стороны основания, то площадь боковой поверхности прямой призмы

$S_{бок} = ah + bh + ch + dh + ... = (a + b + c + d + ...)h = P_{осн} \cdot h$.

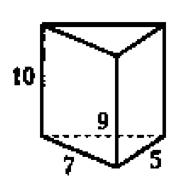
Правильная призма

Два условия:

а) в основании лежит правильный многоугольник;
б) боковые ребра перпендикулярны основанию.

Боковые грани — равные прямоугольники.

Запомните!

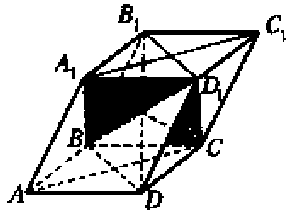


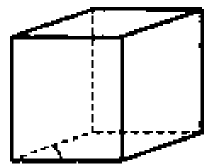
Площадь боковой поверхности *прямой призмы* равна сумме площадей ее боковых граней (как у любой призмы) или произведению периметра основания на высоту: $\boxed{S_{бок} = P_{осн} \cdot h}$

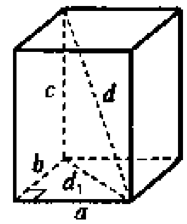
Пример. Для указанной на рисунке призмы $S_{бок} = 7 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 9 \cdot 10 = 70 + 50 + 90 = 210$ или $S_{бок} = P_{осн} \cdot h = (7 + 5 + 9) \cdot 10 = 21 \cdot 10 = 210$.

Параллелепипед – это призма...

наклонный **прямой** **прямоугольный**







$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

Параллелепипед – это призма, в основании которой лежит параллелограмм. Противоположные боковые грани параллелепипеда равны. Любые две противоположные грани могут быть приняты за основания.

Теорема 2. *Диагонали параллелепипеда (BD_1, B_1D, A_1C, AC_1) пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*

Доказательство. Диагональ BD_1 принадлежит двум параллелограммам. Диагональ A_1C также принадлежит двум параллелограммам. А у параллелограмма диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Прямой параллелепипед – это параллелепипед, у которого *боковые ребра* перпендикулярны основанию. *В основании* лежит параллелограмм. *Боковые грани* – прямоугольники.

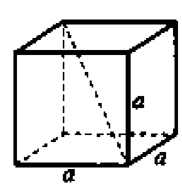
Прямоугольный параллелепипед – это прямой параллелепипед, *в основании* которого лежит прямоугольник. Все его *грани* – прямоугольники, и все его *четыре диагонали* равны между собой.

Теорема 3. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:* $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

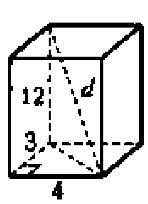
Доказательство (по рисунку вверху). Диагональ основания: $d_1^2 = a^2 + b^2$. Боковое ребро перпендикулярно основанию. Из прямоугольного треугольника с катетами c и d_1 диагональ параллелепипеда: $d^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Следствие. Диагональ куба с ребром a равна:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$



Запомните!



Квадрат диагонали *прямоугольного параллелепипеда* равен сумме квадратов трех его измерений: $\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$

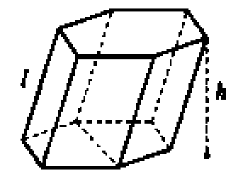
Пример. Измерения прямоугольного параллелепипеда 3, 4 и 12. Для нахождения его диагонали d воспользуемся указанной формулой:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 9 + 16 + 144 = 169,$$
$$d = \sqrt{169} = 13.$$

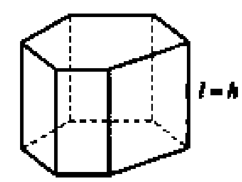
Призмы бывают:

а) треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д.;

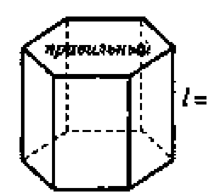
б) наклонные, прямые, правильные.



наклонная шестиугольная призма (высота меньше бокового ребра)



прямая шестиугольная призма (высота равна боковому ребру)



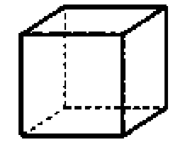
правильная шестиугольная призма (высота равна боковому ребру и в основании правильный шестиугольник)

Внимание!

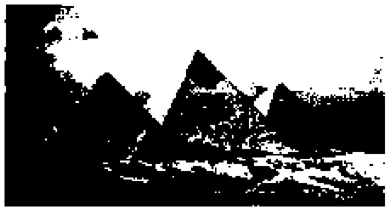
Правильная четырехугольная призма в то же время – прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат.

Куб – это правильная четырехугольная призма с высотой, равной ребру основания.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны.



Пирамида ассоциируется со словом *Египет*. Действительно, самая высокая пирамида в мире — это пирамида Хеопса (около 140 м).



Пирамида — это многогранник, в основании которого лежит n-угольник, а остальные n граней (боковые) — треугольники с общей вершиной, называющейся вершиной пирамиды.

Элементы пирамиды:
- основание;
- вершина;
- боковые грани;
- ребра основания;
- боковые ребра.

Пирамиды бывают:

а) в зависимости от количества сторон основания — *треугольные, четырехугольные, пятиугольные* и т. д.;

б) *правильные* — в основании которых лежит правильный многоугольник (равносторонний треугольник, квадрат и т. д.), а боковые ребра равны;

в) *усеченные* — плоскость, параллельная основанию и пересекающая боковые ребра пирамиды, отсекает от данной пирамиды меньшую пирамиду; оставшаяся часть данной пирамиды, заключенная между плоскостью сечения и плоскостью основания, называется усеченной пирамидой.

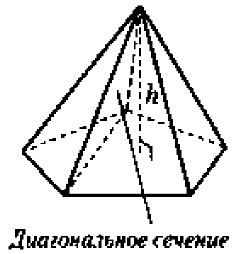
АПОФЕМА

Апофема — это высота боковой грани *правильной* пирамиды, проведенная из вершины к ребру основания. Обозначается l или L.

Внимание!
Апофема — элемент только правильной пирамиды!

Пирамида

произвольная



правильная

а) в основании правильный
б) боковые ребра равны

Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания.
Диагональное сечение — это сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

Тетраэдр — другое название треугольной пирамиды.

Правильный тетраэдр — это тетраэдр, у которого все ребра равны.
Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей боковых граней: $S_{бок} = S_1 + S_2 + ... + S_n$.
Площадь полной поверхности: $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.

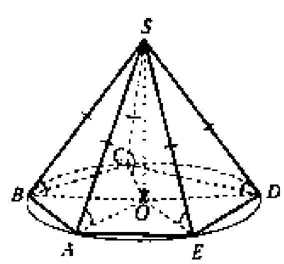
Правильная пирамида — это пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а боковые ребра равны.
Вершина правильной пирамиды проектируется в центр основания!*
Апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины к ребру основания.

Теорема 4. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему:* $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l$.

<u>Доказательство.</u> Найдем площадь одной грани и умножим на n:

$$S_{бок} = \left(\frac{1}{2}al\right) \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l, \text{ так как } P_{осн} = an.$$

Задача 1



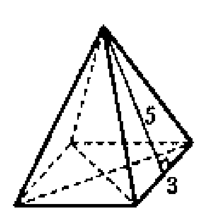
Если боковые ребра пирамиды равны или равно наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной окружности.

<u>Доказательство.</u> Из равенства прямоугольных треугольников по общему катету SO и гипотенузе или по катету и противолежащему острому углу следует равенство «нижних» катетов. Значит, точка O равноудалена от вершин основания.

Следствие. Около основания такой пирамиды можно описать окружность.

* Термины «проектирование» и «проецирование» равнозначны.

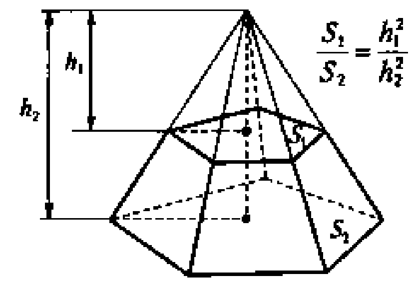
Запомните!



Площадь боковой поверхности *правильной пирамиды* равна сумме площадей боковых граней, как у любой пирамиды, или произведению половины периметра основания на апофему: $\boxed{S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l}$

Пример. $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l = \frac{1}{2}(3 \cdot 4) \cdot 5 = 30$.

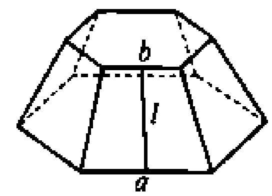
Усеченная пирамида



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{h_1^2}{h_2^2}$$

Параллельное сечение

$$S_{бок}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l$$



Правильная усеченная пирамида

Параллельное сечение пирамиды — сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

Свойства. 1) Сечение, параллельное основанию пирамиды, отсекает на высоте пирамиды и боковых ребрах пропорциональные отрезки; 2) в сечении получается многоугольник, подобный основанию; 3) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Усеченная пирамида — это часть пирамиды, заключенная между основанием и параллельным сечением пирамиды.

Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.

Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

Высота усеченной пирамиды — это перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего.

Площадь полной поверхности $S_{полн}=S_{бок}+S_{осн\,1}+S_{осн\,2}$.

Правильная усеченная пирамида получается из правильной пирамиды.

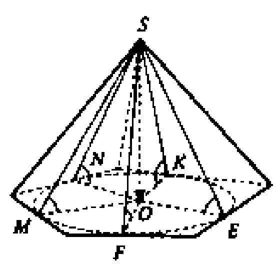
Апофема — высота боковой грани правильной усеченной пирамиды.

Теорема 5. *Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:* $S_{бок}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l$.

Доказательство. Площадь одной грани-трапеции равна $S_1=\frac{a+b}{2}\cdot l$,

$$S_{бок}=S_{грани}\cdot n=\left(\frac{a+b}{2}\cdot l\right)\cdot n=\frac{an+bn}{2}\cdot l=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l.$$

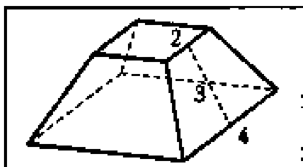
Задача 2



Если высоты боковых граней пирамиды, проведенные из вершины, равны или боковые грани равно наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной окружности.

Доказательство. Из равенства прямоугольных треугольников по общему катету SO и гипотенузе или по катету и противолежащему острому углу следует равенство «нижних» катетов. А по теореме о трех перпендикулярах эти катеты перпендикулярны сторонам основания. O — центр вписанной окружности.

Следствие. В основание такой пирамиды можно вписать окружность.



Запомните!

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему: $\boxed{S_{бок}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l}$

Пример. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 см и 4 см, апофема — 3 см. Площадь боковой поверхности $S_{бок}=\frac{2\cdot4+4\cdot4}{2}\cdot3=12\cdot3=36$ (см^2).

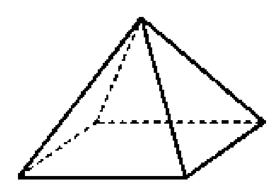
Свойства правильной пирамиды

1. В основании лежит правильный многоугольник (равносторонний треугольник, квадрат и т. д.).
2. Боковые ребра равны.
3. Вершина проектируется в центр основания (основание высоты совпадает с центром основания).
4. Боковые ребра равно наклонены к основанию.
5. Боковые грани — равные равнобедренные треугольники.
6. Боковые грани равно наклонены к основанию.

ПОДГОТОВКА К ЦТ

Свойство 1

Если дана четырехугольная пирамида с равно наклоненными или равными боковыми ребрами, в основании которой лежит параллелограмм, то этот параллелограмм является прямоугольником.

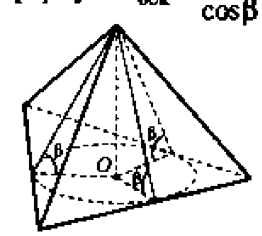


Свойство 2

Если дана четырехугольная пирамида с равно наклоненными боковыми гранями, в основании которой лежит параллелограмм, то этот параллелограмм является ромбом.

Свойство 3

Если дана пирамида, у которой все двугранные углы при основании равны β, то площадь боковой поверхности пирамиды находится по формуле $S_{бок}=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$.



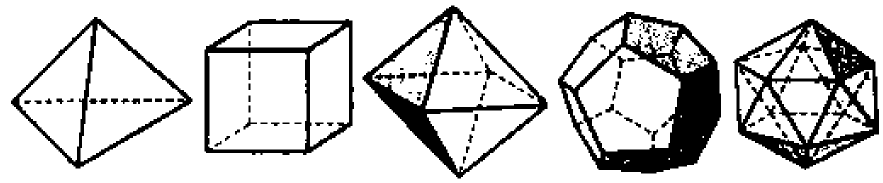
* См.: «Наглядная геометрия. 10 класс». С. 97.

Простые и непростые вопросы

1. Сколько всего граней имеет параллелепипед?
2. Сколько вершин имеет пятиугольная призма?
3. Сколько диагоналей у параллелепипеда?
4. Сумма длин диагоналей прямоугольного параллелепипеда равна 24 см. Чему равна длина одной диагонали?
5. Сколько всего диагоналей боковых граней имеет параллелепипед?
6. На сколько больше ребер у четырехугольной призмы, чем у четырехугольной пирамиды?
7. Чему равна сумма плоских углов при одной вершине правильной треугольной призмы?
8. Является ли правильная призма прямой призмой?
9. Является ли прямая призма правильной призмой?
10. Является ли правильная четырехугольная призма параллелепипедом?
11. Чем отличается прямой параллелепипед от прямоугольного параллелепипеда?
12. Чем отличается четырехугольная призма от параллелепипеда?
13. Периметр основания правильной призмы равен 24 см, высота призмы — 10 см. Чему равна площадь боковой поверхности призмы?
14. Чему равна сумма плоских углов при одной вершине правильного тетраэдра?
15. Сколько граней имеет шестиугольная пирамида?
16. У пирамиды 36 ребер. Сколько у нее граней?
17. У n-угольной пирамиды 42 ребра. Чему равно n?
18. У правильной n-угольной призмы 60 ребер. Чему равно n?
19. Сумма боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды равна 96 см. Чему равна длина одного бокового ребра?
20. Сумма всех ребер правильного тетраэдра равна 48 см. Чему равна длина одного ребра?

Правильные многогранники

Многогранник называется **правильным**, если все его грани — равные правильные многоугольники и из каждой вершины выходит одинаковое количество ребер.



Правильный тетраэдр — треугольная пирамида, у которой все грани — равные равносторонние треугольники.

Гексаэдр, или куб, — фигура, 6 граней которой — равные квадраты, сходящиеся по три в каждой вершине.

Октаэдр — фигура, 8 граней которой — равные равносторонние треугольники, сходящиеся по четыре в каждой вершине.

Додекаэдр — фигура, 12 граней которой — равные правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине.

Икосаэдр — фигура, 20 граней которой — равные равносторонние треугольники, сходящиеся по пять в каждой вершине.

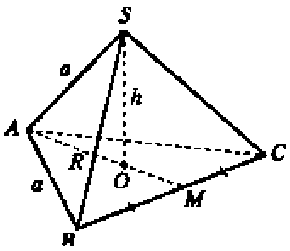
Правильный многогранник	Вершины	Грани	Ребра
Правильный тетраэдр	4	4	6
Гексаэдр (куб)	8	6	12
Октаэдр	6	8	12
Додекаэдр	20	12	30
Икосаэдр	12	20	30

Футбольный мяч — модель многогранника, который не является правильным. Его поверхность состоит из правильных пятиугольников и шестиугольников, и из каждой вершины выходит 3 ребра.

Запомните!

Правильных многогранников пять видов:
правильный тетраэдр, октаэдр, додекаэдр (их поверхность состоит из равносторонних треугольников), гексаэдр (куб), икосаэдр (поверхность состоит из правильных пятиугольников).

Главная задача темы



Дан правильный тетраэдр с ребром a.
Найдите высоту тетраэдра.

Решение.

$SO = h$ — высота правильного тетраэдра.

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота равностороннего ΔABC.

$AO:OM = 2:1$ — свойство медиан.

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Из прямоугольного ΔAOS:

$$h = SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Замечание. $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$ — как радиус описанной окружности ΔABC.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Призма. Свойство боковых ребер произвольной призмы.
2. Высота, диагональ, диагональное сечение призмы.
3. Боковая поверхность призмы. Полная поверхность призмы (формула).
4. Прямая призма. Свойство высоты прямой призмы.
5. Теорема 1. О площади боковой поверхности прямой призмы.
6. Правильная призма. Свойство ее боковых граней.
7. Параллелепипед. Свойство граней параллелепипеда.
8. Теорема 2. Свойство диагоналей параллелепипеда.
9. Прямой параллелепипед.
10. Прямоугольный параллелепипед. Свойство его граней.
11. Теорема 3. Формула диагонали прямоугольного параллелепипеда.
12. Пирамида. Тетраэдр. Правильный тетраэдр.
13. Высота произвольной пирамиды.
14. Диагональное сечение пирамиды.
15. Боковая поверхность пирамиды. Полная поверхность пирамиды.
16. Правильная пирамида. Свойства правильной пирамиды.
17. Теорема 4. О боковой поверхности правильной пирамиды.
18. Усеченная пирамида. Высота. Боковые грани.
19.* Теорема 5. О боковой поверхности правильной усеченной пирамиды.
20.* Задача о пирамиде с равными или равно наклоненными ребрами.
21.* Задача о пирамиде с равно наклоненными гранями.
22.* Формула площади боковой поверхности пирамиды с равно наклоненными гранями (с. 15, Свойство 3).
23. Пять видов правильных многогранников (ТеГеОДИ).
24.* Задача о нахождении высоты правильного тетраэдра.

Те — тетраэдр **Ге** — гексаэдр **О** — октаэдр **Д** — додекаэдр **И** — икосаэдр

Вопросы * для претендующих на отметки «9» и «10».

Запомните!

Тетраэдр — это произвольная треугольная пирамида!

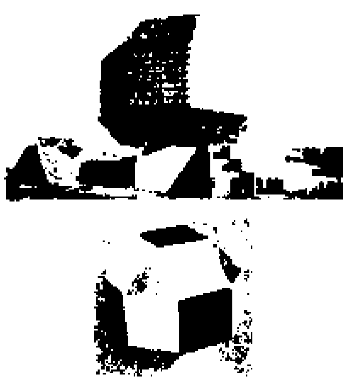
Правильный тетраэдр — это тетраэдр, у которого все ребра равны!

Все грани правильного тетраэдра — равные равносторонние треугольники.

Высота правильного тетраэдра со стороной a находится по формуле

$$\boxed{h = a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

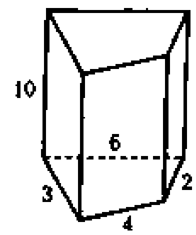
21. У правильной четырехугольной пирамиды ребро основания равно 4 см, а боковое ребро — 6 см. Чему равна сумма длин всех ребер пирамиды?
22. Сколько диагоналей имеет треугольная призма?
23. Периметр основания правильной пирамиды равен 30 см, апофема — 5 см. Чему равна площадь боковой поверхности пирамиды?
24. Если боковые ребра пирамиды равны, то ее вершина проектируется в ...
25. Если боковые ребра пирамиды равно наклонены, то ее вершина проектируется в ...
26. Если боковые грани пирамиды равно наклонены к основанию, то ее вершина проектируется в ...
27. Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания, то у пирамиды ... и ...
28. Если вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности, то у пирамиды ...
29. Сколько всего существует видов правильных многогранников?
30. Сколько существует видов правильных многогранников, у которых грани являются треугольниками?
31. Какой из правильных многогранников имеет большее количество граней и ребер: икосаэдр или додекаэдр?
32. Есть груда кирпичей. Как при помощи линейки измерить диагональ кирпича, не используя формулу диагонали прямоугольного параллелепипеда?
33. Сколько граней у «алмаза» Национальной библиотеки?



2 Зак. 2291

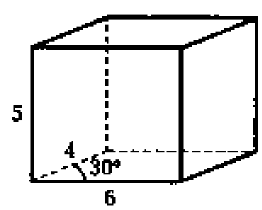
КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Начальный уровень



№ 1. *В основании прямой четырехугольной призмы лежит четырехугольник со сторонами 3 см, 6 см, 2 см и 4 см. Высота призмы равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.*

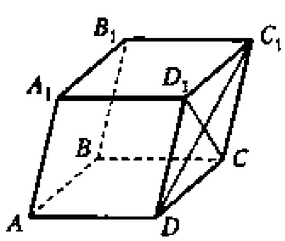
Решение.
Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. Найдем площадь каждого прямоугольника и результаты сложим. Получим $S_{бок} = 3\cdot 10 + 6\cdot 10 + 2\cdot 10 + 4\cdot 10 = 30 + 60 + 20 + 40 = 150$ (см^2).
Ответ: 150 см^2.



№ 2. *В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с основаниями 3 см и 4 см и острым углом 30°. Боковое ребро параллелепипеда равно 5 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.*

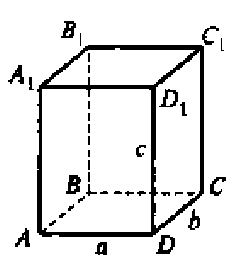
Решение.
Полная поверхность состоит из боковой поверхности и двух оснований. Площадь основания найдем по формуле площади параллелограмма $S = ab\sin\alpha$. Получим $S_{осн} = 4\cdot 6\cdot \sin 30° = 4\cdot 6\cdot \frac{1}{2} = 12$ (см^2).

Боковые грани прямого параллелепипеда – прямоугольники. Причем противоположные грани равны.
$S_{бок} = (4\cdot 5 + 6\cdot 5)\cdot 2 = 50\cdot 2 = 100$ (см^2);
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 100 + 2\cdot 12 = 124$ (см^2).
Ответ: 124 см^2.



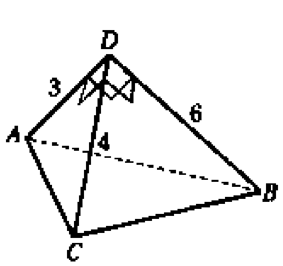
№ 3. *Все грани параллелепипеда – ромбы с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.*

Решение.
Площадь ромба равна половине произведения диагоналей. Тогда площадь одной грани $S_{DD_1C_1C} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{6\cdot 8}{2} = 24$ (см^2). У параллелепипеда 6 граней. Площадь полной поверхности
$S_{A\ldots D_1} = 6\cdot 24 = 144$ (см^2).
Ответ: 144 см^2.



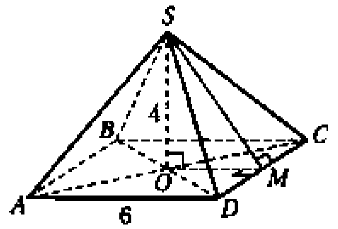
№ 4. *Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.*

Решение.
Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Противоположные грани параллелепипеда равны. Поэтому $S_{ABCD} = ab$, $S_{AA_1D_1D} = ac$, $S_{DD_1C_1C} = bc$. Площадь полной поверхности $S_{A\ldots D_1} = 2(ab + bc + ac)$.
Ответ: $2(ab + bc + ac)$.



№ 5. *Дана треугольная пирамида, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны и равны 4 см, 3 см и 6 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.*

Решение.
Площадь прямоугольного треугольника находится по формуле $S = \frac{ab}{2}$.
Поэтому $S_{ADC} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ (см^2), $S_{ADB} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9$ (см^2), $S_{CDB} = \frac{4\cdot 6}{2} = 12$ (см^2).
$S_{бок} = S_{ABC} + S_{ADB} + S_{CDB} = 6 + 9 + 12 = 27$ (см^2).
Ответ: 27 см^2.

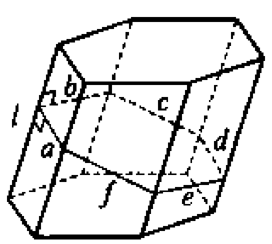


№ 6. *Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания* 6 *см и высотой* 4 *см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.*

Решение.
Полная поверхность состоит из боковой поверхности и основания. Основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат. Поэтому $S_{осн} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см^2). Боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Опустим высоту SO пирамиды. O — центр основания. По условию $SO = 4$ см. Проведем апофему SM грани DSC — это высота боковой грани. M — середина DC. Отрезок $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ (см) — средняя линия треугольника ACD. Из прямоугольного ΔSOM по теореме Пифагора апофема $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см). Площадь треугольника DSC равна $S_{DSC} = \frac{1}{2}DC \cdot SM = \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 5 = 15$ (см^2). Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Поэтому площадь боковой поверхности $S_{бок} = 4 \cdot S_{DSC} = 4 \cdot 15 = 60$ (см^2).
$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 60 + 36 = 96$ (см^2).
Ответ: 96 см^2.

Замечание. Площадь боковой поверхности пирамиды можно было найти по формуле $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн}l = \frac{1}{2}\cdot 4AD \cdot SM = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ (см^2).

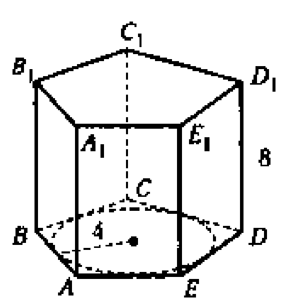
Повышенный уровень



№ 7. *Дана шестиугольная наклонная призма с боковым ребром l = 10 см. Периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, равен 42 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.*

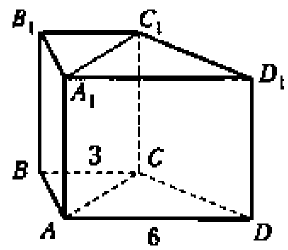
Решение.
Все боковые грани наклонной призмы — параллелограммы. Так как боковые ребра призмы параллельны, то плоскость, перпендикулярная одному боковому ребру, перпендикулярна и остальным. Тогда отрезки a, b, c, d, e, f, по которым плоскость пересекает боковые грани, являются высотами параллелограммов с основанием l. Площадь боковой поверхности призмы
$S_{бок} = al + bl + cl + dl + el + fl = (a + b + c + d + e + f)\cdot l = P_{\perp}l =$
$= 42 \cdot 10 = 420$(см^2).
Ответ: 420 см^2.

Следствие. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро $S_{бок} = P_{\perp}l$.

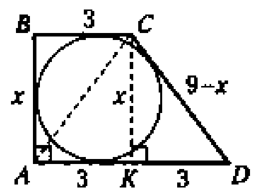


№ 8. *Дана прямая пятиугольная призма, в основание которой вписана окружность с радиусом* 4 *см. Площадь основания призмы равна* 36 *см^2, боковое ребро призмы равно* 8 *см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.*

Решение.
Высота прямой призмы равна боковому ребру, т. е. $h = DD_1 = 8$ см. Площадь боковой поверхности прямой призмы $S_{бок} = P_{осн}\cdot h$. Для нахождения периметра основания воспользуемся формулой площади описанного многоугольника $S = pr$, где p — полупериметр многоугольника. Получим $64 = p \cdot 4$, $p = 16$ (см); $P_{осн} = 2 \cdot 16 = 32$ (см). Площадь боковой поверхности $S_{бок} = 32 \cdot 8 = 256$ (см^2).
Ответ: 256 см^2.



№ 9. *Дана прямая четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В основании призмы лежит прямоугольная трапеция с основаниями $BC = 3$ см, $AD = 6$ см и $\angle A = 90°$, в которую можно вписать окружность. Диагональное сечение AA_1C_1C призмы является квадратом. Найдите площадь полной поверхности призмы.*



Решение.

1) Изобразим основание $ABCD$ отдельно. Так как трапеция является описанной, то суммы длин ее противоположных сторон равны, т. е. $AB + CD = BC + AD = 3 + 6 = 9$ (см). Если $AB = x$ см, то $CD = (9 - x)$ см. Опустим высоту $CK = AB = x$. Так как $ABCK$ — прямоугольник, то $AK = BC = 3$ см, $KD = AD - AK = 6 - 3 = 3$ (см). Из прямоугольного треугольника CKD по теореме Пифагора $CK^2 + KD^2 = CD^2$, $x^2 + 3^2 = (9 - x)^2$; $x^2 + 9 = 81 - 18x + x^2$; $x = 4$. Тогда $AB = 4$ см, $CD = 9 - 4 = 5$ (см). $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см);

2) так как AA_1C_1C — квадрат, то $AA_1 = AC = 5$ см;

3) площадь боковой поверхности

$S_{бок} = (AB + BC + CD + AD) \cdot AA_1 = (4 + 3 + 5 + 6) \cdot 5 = 90$ (см^2).

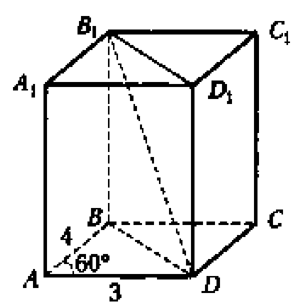
Площадь основания

$S_{осн} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot AB = \dfrac{3+6}{2} \cdot 4 = 18$ (см^2).

Площадь полной поверхности призмы

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 90 + 2 \cdot 18 = 126$ (см^2).

Ответ: 126 см^2.



№ 10. *Найдите меньшую диагональ прямого параллелепипеда высотой 6 см со сторонами основания 3 см и 4 см и углом между ними 60°.*

Решение.

Пусть $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $\angle BAD = 60°$, $BB_1 = 6$ см. Так как $BD < AC$ и $AA_1 = BB_1$, то из прямоугольных треугольников B_1BD и A_1AC следует $B_1D < A_1C$. Так как BB_1D_1D и AA_1C_1C — прямоугольники, то $B_1D = D_1B$; $A_1C = C_1A$. Тогда B_1D — искомая диагональ. Из треугольника ABD по теореме косинусов находим:

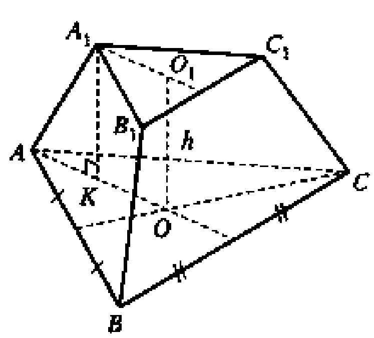
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A =$

$= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 9 + 16 - 24 \cdot \dfrac{1}{2} = 13.$

Из прямоугольного треугольника B_1BD:

$B_1D = \sqrt{B_1B^2 + BD^2} = \sqrt{6^2 + 13} = \sqrt{49} = 7$ (см).

Ответ: 7 см.



№ 11. *Найдите высоту правильной усеченной треугольной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если стороны ее оснований равны $3\sqrt{3}$ см и $6\sqrt{3}$ см, а боковое ребро равно 5 см.*

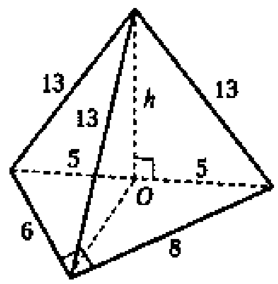
Решение.

Основания правильной усеченной пирамиды — правильные треугольники. Так как правильная усеченная пирамида получается из правильной пирамиды, то отрезок O_1O, соединяющий центры оснований, равен высоте этой пирамиды. OA и O_1A_1 — радиусы окружностей, описанных около оснований. По формуле $a = R\sqrt{3}$ находим $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ (см), $O_1A_1 = \dfrac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ (см). Проведем в плоскости AA_1O_1O отрезок $A_1K \perp AO$. Так как KA_1O_1O — прямоугольник, то $A_1K = O_1O = h$; $OK = O_1A_1 = 3$ см, $AK = OA - OK = 6 - 3 = 3$ (см). По теореме Пифагора из треугольника AKA_1 находим высоту пирамиды $h = A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

ПОДГОТОВКА К ЦТ

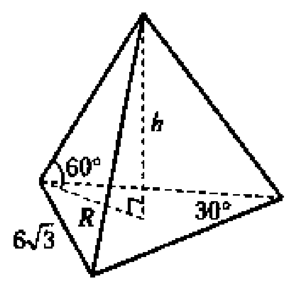
ЦТ 1. *Боковые ребра тетраэдра равны по* 13 *см, стороны основания равны* 6 *см,* 8 *см и* 10 *см. Найдите высоту тетраэдра.*



Решение.
Так как боковые ребра тетраэдра равны, то его вершина проектируется в центр описанной окружности основания. Поскольку $6^2+8^2=10^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, в основании лежит прямоугольный треугольник. Его гипотенуза равна 10 см. Центр O окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а радиус окружности равен половине гипотенузы, т. е. $R=\frac{c}{2}=5$ см. Из прямоугольного треугольника $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см).

Ответ: 12 см.

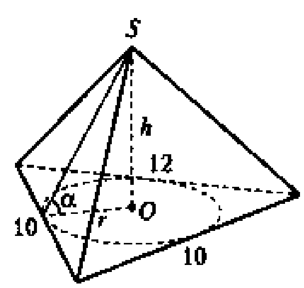
ЦТ 2. *Все боковые ребра тетраэдра наклонены к основанию под углом* 60°, *одна из сторон основания равна* $6\sqrt{3}$ *см, а противолежащий ей угол равен* 30°. *Найдите высоту тетраэдра.*



Решение.
Так как боковые ребра тетраэдра равно наклонены, то его вершина проектируется в центр описанной окружности основания. По формуле $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ находим R: $\frac{6\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=2R$; $\frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=R$; $R=6\sqrt{3}$ (см). Из прямоугольного треугольника с катетами h, R и острым углом 60° получим $\frac{h}{R}=\operatorname{tg}60^\circ$; $h=R\operatorname{tg}60^\circ=6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=18$ (см).

Ответ: 18 см.

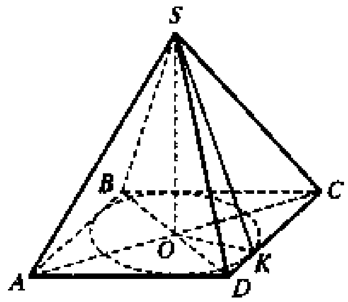
ЦТ 3. *Все боковые грани треугольной пирамиды наклонены к основанию под углом* $\alpha=\arccos\frac{3}{5}$, *стороны основания равны* 10, 10 *и* 12. *Найдите высоту пирамиды.*

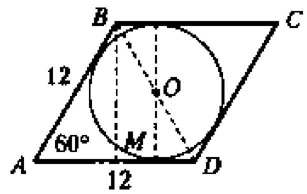


Решение.
Так как боковые грани пирамиды равно наклонены к основанию, то ее вершина S проектируется в центр O окружности, вписанной в основания. Из прямоугольного треугольника с катетами h, r и острым углом α находим $\frac{h}{r}=\operatorname{tg}\alpha$, $h=r\operatorname{tg}\alpha$. Из условия $\alpha=\arccos\frac{3}{5}$ следует, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, α — острый угол. Из формулы $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ находим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Радиус r найдем из формулы $S=pr$, где p — полупериметр треугольника, S — его площадь. Площадь основания найдем по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Имеем $p=\frac{10+10+12}{2}=16$, $p-a=16-10=6$, $p-b=16-10=6$, $p-c=16-12=4$. Площадь $S=\sqrt{16\cdot6\cdot6\cdot4}=48$; $r=\frac{S}{p}=\frac{48}{16}=3$; $h=3\cdot\frac{4}{3}=4$.

Ответ: 4.

ЦТ 4. *В основании пирамиды лежит параллелограмм с периметром, равным 48, и углом 60°. Высота пирамиды равна 3. Двугранные углы при основании равны. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.*





Решение. Если боковые грани пирамиды равно наклонены к основанию, то площадь ее боковой поверхности равна площади основания, деленной на косинус двугранного угла при ребре основания, т. е. $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\beta}$. Так как боковые грани пирамиды равно наклонены к основанию, то ее вершина проектируется в центр окружности, вписанной в основания. В параллелограмм можно вписать окружность, если он является ромбом.

Значит, $ABCD$ — ромб со стороной, равной 48 : 4 = 12, острым углом 60° и площадью $S_{осн} = a \cdot a \cdot \sin\alpha = 12 \cdot 12 \cdot \sin 60° = 72\sqrt{3}$.

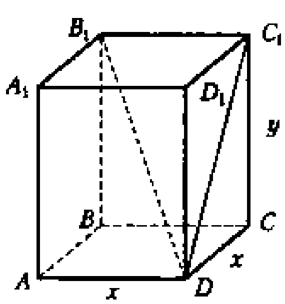
Диметр окружности, вписанной в ромб, равен высоте ромба. Опустим высоту BM ромба. Из прямоугольного треугольника ABM отношение $\frac{BM}{AB} = \sin 60°$, $BM = AB \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Радиус вписанной окружности равен $3\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника SOK высота боковой грани $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$, косинус двугранного угла при основании

$$\cos\beta = \frac{OK}{SK} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \text{Значит,}\ S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\beta} = \frac{72\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 144.$$

Замечание. Можно было воспользоваться тем, что в пирамиде с равно наклоненными гранями высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны между собой. Тогда площадь боковой поверхности данной пирамиды можно найти по формуле $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 6 = 144$.

Ответ: 144.

ЦТ 5. *Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $2\sqrt{17}$, диагональ боковой грани равна $2\sqrt{13}$. Найдите площадь полной поверхности призмы.*



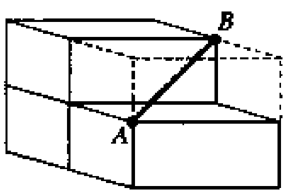
Решение. У правильной четырехугольной призмы в основании лежит квадрат и боковые ребра перпендикулярны основанию. Диагональ призмы $B_1D = 2\sqrt{17}$, диагональ боковой грани $C_1D = 2\sqrt{13}$, $AD = DC = x$, $CC_1 = y$.

Так как правильная четырехугольная призма является прямоугольным параллелепипедом, то $B_1D^2 = x^2 + x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{17}\right)^2 = 68$. Из прямоугольного треугольника DCC_1 находим $DC_1^2 = x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2 = 52$. Следовательно, $x^2 + 52 = 68$, $x = 4$, $y = \sqrt{52 - 16} = \sqrt{36} = 6$. Площадь основания призмы $S_{осн} = x^2 = 16$. Площадь боковой поверхности $S_{бок} = P \cdot h = 4x \cdot y = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$. Площадь полной поверхности призмы $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 96 + 2 \cdot 16 = 128$.

Ответ: 128.

Ответы на простые и непростые вопросы

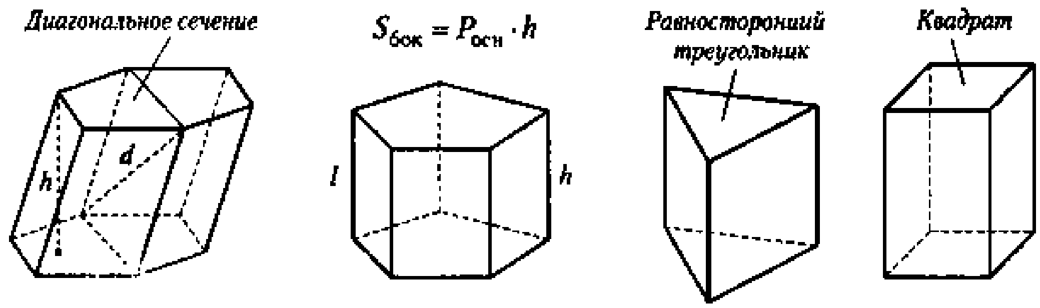
1. 6.
2. 10.
3. 4.
4. 6. Все 4 диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
5. 8.
6. На 4.
7. 240°.
8. Да.
9. Нет, не обязательно.
10. Да.
11. У прямого параллелепипеда в основании — параллелограмм, у прямоугольного — прямоугольник.
12. У четырехугольной призмы в основании — произвольный четырехугольник, у параллелепипеда — параллелограмм.
13. 240 $см^2$.
14. 180°.
15. 7.
16. 19.
17. 21.
18. 20.
19. 16.
20. 8.
21. 40.
22. 0.
23. 75.
24. Если боковые ребра пирамиды равны, то ее вершина проектируется в центр описанной окружности основания.
25. Если боковые ребра пирамиды равно наклонены к основанию, то ее вершина проектируется в центр описанной окружности основания.
26. Если боковые грани пирамиды равно наклонены к основанию, то ее вершина проектируется в центр вписанной окружности основания.
27. Если вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности, то у пирамиды боковые ребра равны и равно наклонены к основанию.
28. Если вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности, то у пирамиды боковые грани равно наклонены к основанию.
29. 5.
30. 3.
31. Икосаэдр имеет больше граней. Количества ребер у них равны.
32. Нужно сложить три кирпича, как показано на рисунке. Четвертый кирпич, воображаемый, изображен штриховыми линиями. Расстояние между точками A и B будет равно диагонали кирпича.



33. Форма алмаза Национальной библиотеки называется ромбокубооктаэдр. У него 26 граней.

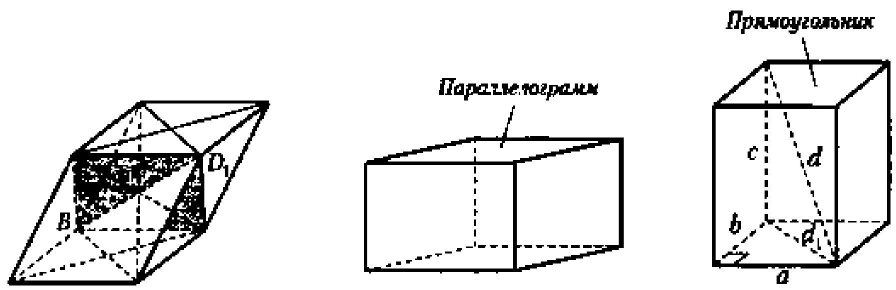
Призма № 1

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$$



наклонная призма **прямая призма** **правильная призма**

Параллелепипед

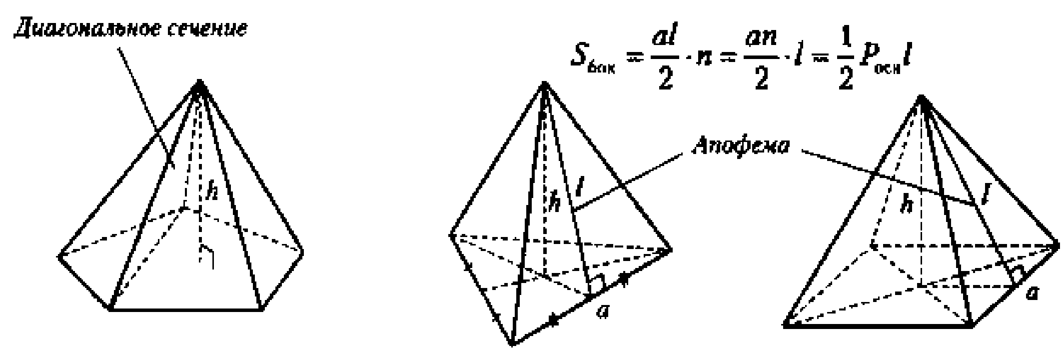


$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

наклонный параллелепипед **прямой параллелепипед** **прямоугольный параллелепипед**

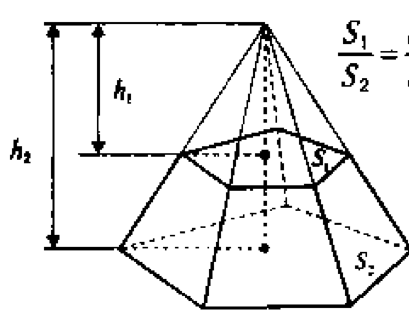
Пирамида

$$S_{бок} = \frac{al}{2} \cdot n = \frac{an}{2} \cdot l = \frac{1}{2} P_{осн} l$$



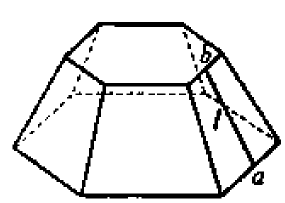
правильная пирамида

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$



параллельное сечение

$$S_{бок} = \left(\frac{a+b}{2} \cdot l\right) \cdot n = $$
$$= \frac{an+bn}{2} \cdot l = $$
$$= \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$



правильная усеченная пирамида

ПОДГОТОВКА К ЦТ
(факультатив)

Правильная пирамида

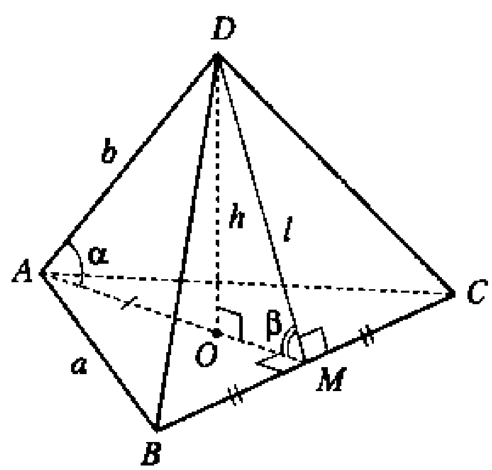
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а боковые ребра равны между собой. *Апофемой* называется высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная к ребру основания.

СВОЙСТВА ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

Вершина правильной пирамиды проектируется в центр основания.
Боковые грани — равные равнобедренные треугольники.
Апофемы равны между собой.
Углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны между собой.
Углы наклона боковых граней к основанию равны между собой.
Двугранные углы при боковых ребрах равны между собой.

Правильная треугольная пирамида $DABC$

В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник.



$AB = AC = BC = a$ — ребро основания, $DA = DB = DC = b$ — боковое ребро, AM — медиана основания, $AO = 2OM$, $DO = h$ — высота пирамиды, O — центр основания, $AO = R$ — радиус описанной окружности, $OM = r$ — радиус вписанной окружности, $DM = l$ — апофема, $\angle DAO = \alpha$ — угол наклона бокового ребра к основанию, $\angle DMO = \beta$ — двугранный угол при основании пирамиды.

Задача

Дано: $a = 3$; $h = 4$.
Найти: b; l; α; β.
Решение. 1) $AO = R$ — радиус окружности, описанной вокруг основания; по формуле $a = R\sqrt{3}$ получим $AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного ΔAOD по теореме Пифагора боковое ребро $AD = \sqrt{DO^2 + AO^2}$, т. е. $b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$;

2) из треугольника AOD вычислим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{DO}{AO} = \frac{h}{R} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}$;

3) $OM = r$ — радиус окружности, вписанной в основание. Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $r = \frac{1}{2}R$, откуда $OM = \frac{1}{2}AO = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного $\triangle DOM$ по теореме Пифагора апофема $DM = \sqrt{DO^2 + OM^2}$, т. е. $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{67}}{2}$;

4) из треугольника DOM найдем: $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{r} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

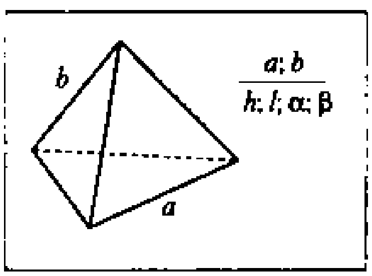
<u>Замечания.</u> 1) $AM = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$; $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

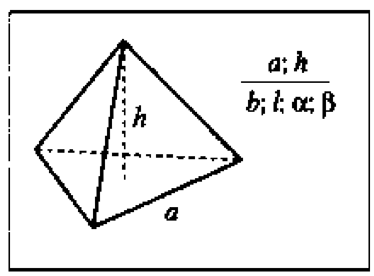
2) Из $\triangle DOA$ и $\triangle DOM$ следует, что $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

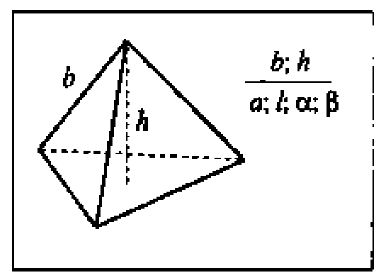
Ответ: $\sqrt{19}$; $\frac{\sqrt{67}}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

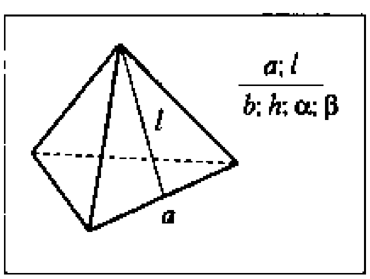
Карточки-задания

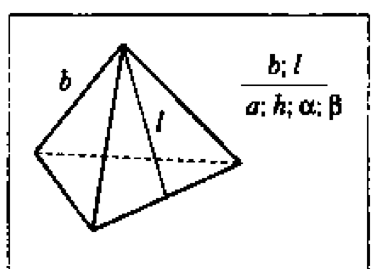
Даны два элемента правильной треугольной пирамиды. Найдите четыре оставшихся элемента. (a — ребро основания, b — боковое ребро, h — высота пирамиды, l — апофема, α — угол наклона бокового ребра, β — двугранный угол при основании пирамиды.)

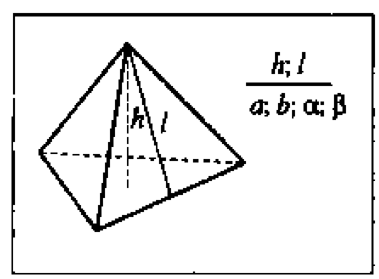


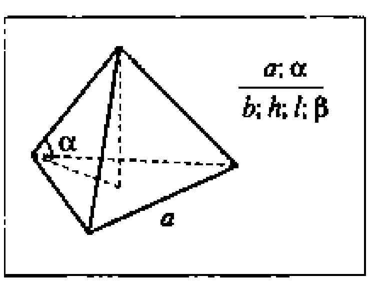


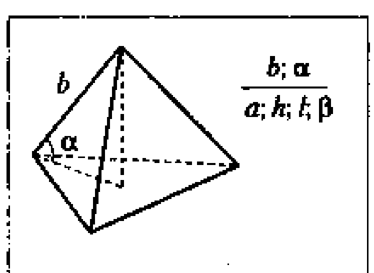


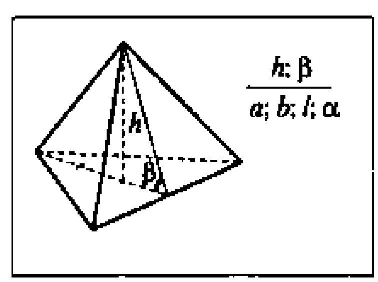








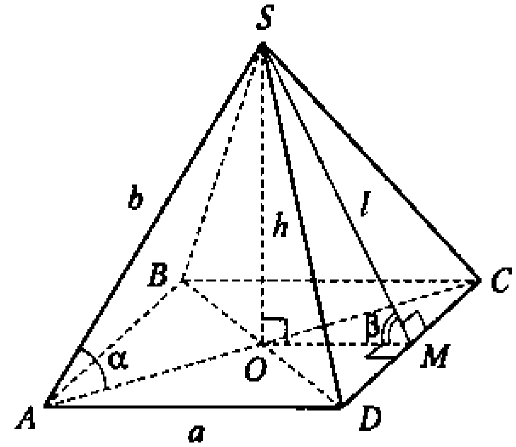




Задания можно решать в общем виде (9–10 баллов). Или можно взять произвольные числовые данные: для a, b, h, l — целые числа 2, 3, 4, 5, ... , для α и β — значения 30°, 45° или 60°.

Правильная четырехугольная пирамида $SABCD$

В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат.



a — ребро основания, b — боковое ребро, h — высота пирамиды, l — апофема, α — угол наклона бокового ребра, β — двугранный угол при основании пирамиды, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{полн}$ — площадь полной поверхности пирамиды.

Задача

Дано: a; b.
Найти: h; l; α; β; $S_{бок}$; $S_{полн}$.

Решение. 1) $AC = a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата $ABCD$; $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; из прямоугольного треугольника SOA по теореме Пифагора $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$, т. е. $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$;

2) $OM = \frac{a}{2}$ как средняя линия $\triangle CAD$; из прямоугольного $\triangle SOM$ по теореме Пифагора находим апофему: $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$, т. е. $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$;

3) из прямоугольного треугольника $\triangle SOA$ находим: $\sin\alpha = \frac{h}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{b}$; $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{b}$;

4) из прямоугольного треугольника SOM находим: $\sin\beta = \frac{h}{l} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$; $\beta = \arcsin\frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$;

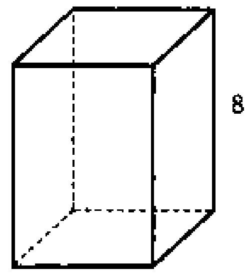
5) $S_{бок} = 4\cdot S_{DSC} = 4\cdot\frac{1}{2}DC\cdot SM = 2al = 2a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$;

6) $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 2a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + a^2$.

Домашнее задание. Изготовить карточки-задания, в которых по двум элементам правильной четырехугольной пирамиды нужно найти оставшиеся (по одному заданию на учащегося). Решение полученного задания нужно записать в тетради, а на обратной стороне карточки — записать полученные ответы.

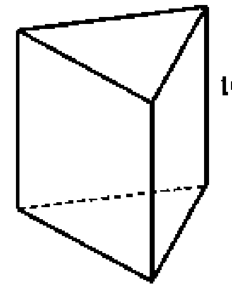
Задачи по теме «Многогранники»

1 Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 16 см^2, боковое ребро призмы равно 8 см. Найдите площадь боковой грани.



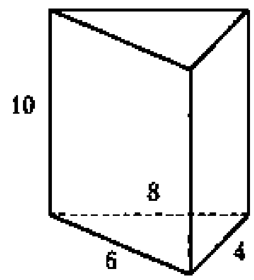
Ответ:

2 Периметр основания правильной треугольной призмы равен 18 см, боковое ребро — 10 см. Найдите площадь боковой грани.



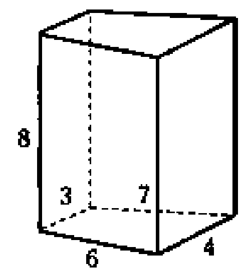
Ответ:

3 В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 4 см, 6 см и 8 см. Высота призмы 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



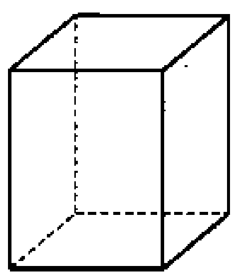
Ответ:

4 Основание прямой призмы — четырехугольник со сторонами 3 см, 7 см, 4 см и 6 см. Высота призмы 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



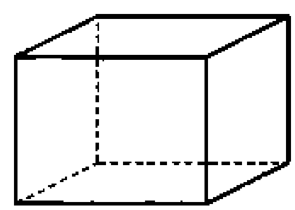
Ответ:

5 Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 см, 5 см и 6 см. Найдите площадь большей грани.



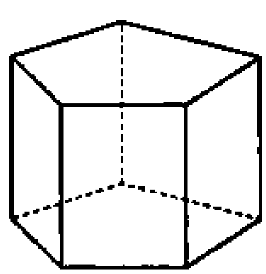
Ответ:

6 Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 10 см, 7 см и 5 см. Найдите площадь меньшей грани.



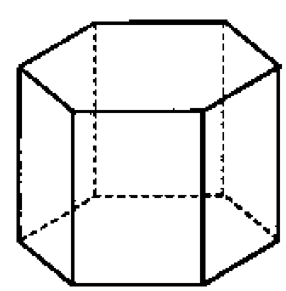
Ответ:

7* Площадь боковой поверхности правильной пятиугольной призмы равна 300 см^2. Высота призмы равна 10 см. Найдите сторону основания.



Ответ:

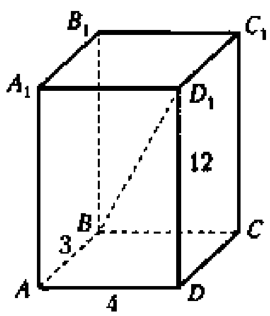
8* Периметр основания правильной шестиугольной призмы равен 24 см, периметр боковой грани — 20 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ:

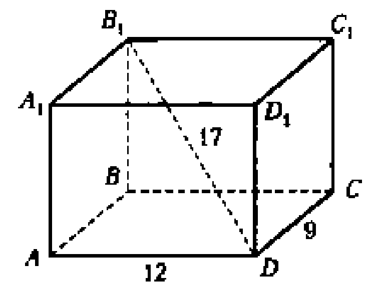
Призма

(9) Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3, 4 и 12.



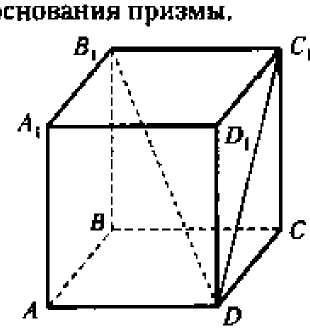
Ответ:

(10) Два измерения прямоугольного параллелепипеда равны 9 и 12, диагональ параллелепипеда — 17. Найдите третье измерение параллелепипеда.



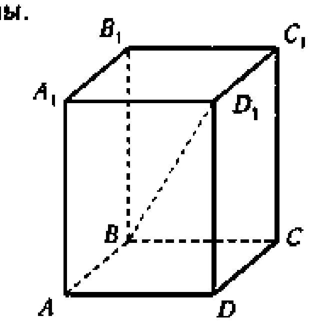
Ответ:

(11) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 10, диагональ ее боковой грани — 8. Найдите периметр основания призмы.



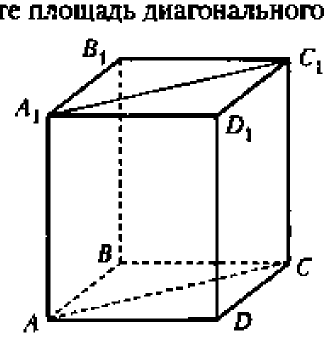
Ответ:

(12) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $\sqrt{131}$, периметр основания равен 20. Найдите высоту призмы.



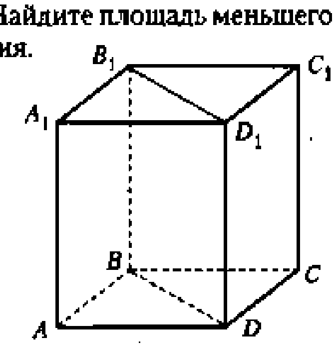
Ответ:

(13) Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 16 см^2, высота призмы — $3\sqrt{2}$ см. Найдите площадь диагонального сечения призмы.



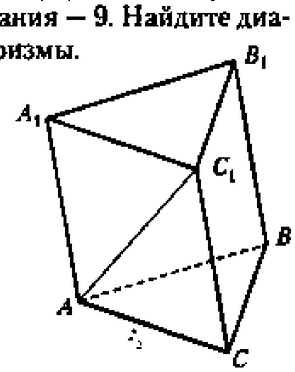
Ответ:

(14) Основанием прямой призмы является ромб с периметром, равным 32, и углом 60°. Боковое ребро призмы — 10. Найдите площадь меньшего диагонального сечения.



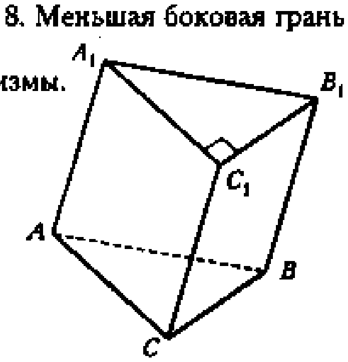
Ответ:

(15) Высота правильной треугольной призмы равна 4, периметр основания — 9. Найдите диагональ боковой грани призмы.



Ответ:

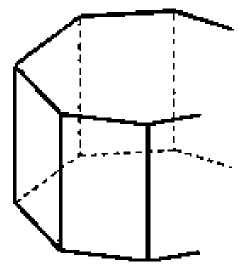
(16) В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 8. Меньшая боковая грань призмы — квадрат.
Найдите высоту призмы.



Ответ:

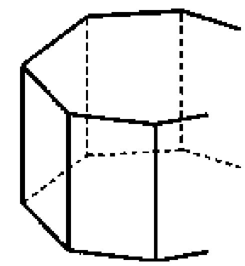
Призма

17 Дана двенадцатиугольная призма. Сколько у нее граней?



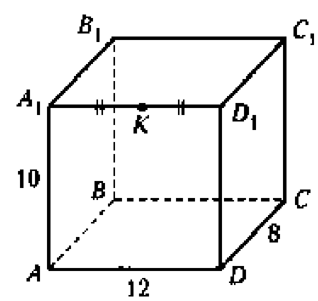
Ответ:

18 У призмы 11 граней. Сколько у нее вершин?



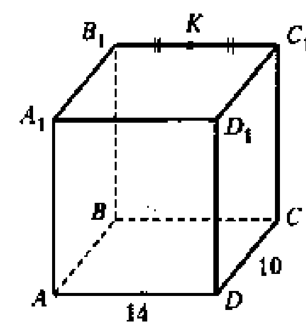
Ответ:

19 По данным на рисунке найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда плоскостью CC_1K.



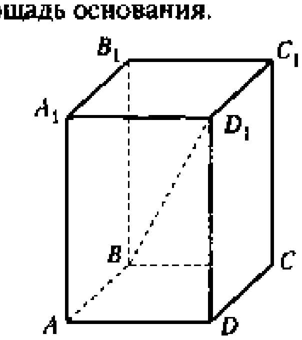
Ответ:

20 Найдите ребро AA_1 прямоугольного параллелепипеда, если площадь его сечения плоскостью DCK равна 250.



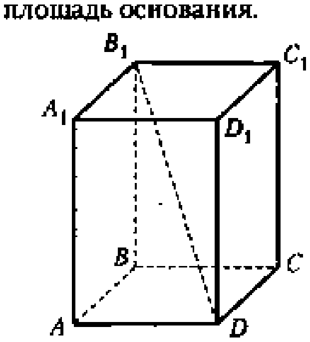
Ответ:

21 Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $8\sqrt{2}$ и наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь основания.



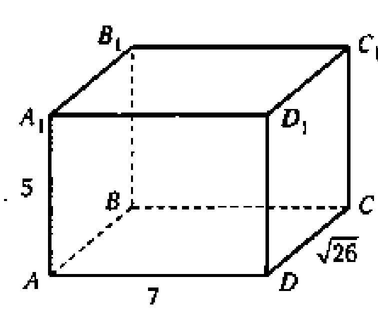
Ответ:

22 Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $6\sqrt{3}$ и составляет с боковой гранью угол 30°. Найдите площадь основания.



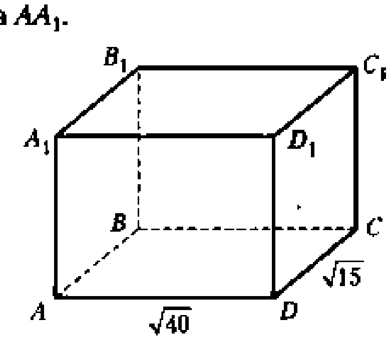
Ответ:

23* $A...D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Найдите радиус окружности, описанной около ΔB_1BD.



Ответ:

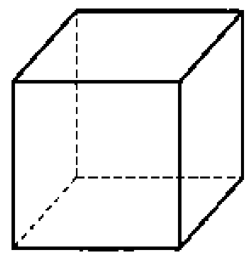
24* $A...D_1$ – прямоугольный параллелепипед. Медиана DM треугольника A_1DC равна 4. Найдите длину ребра AA_1.



Ответ:

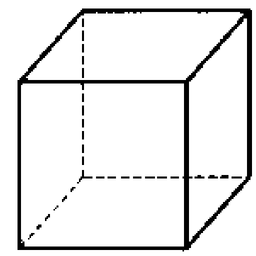
Призма

25 Периметр одной грани куба равен 12 см. Найдите площадь поверхности куба.



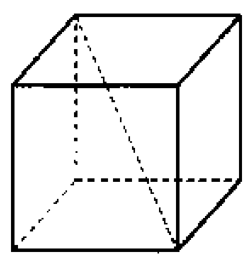
Ответ:

26 Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите периметр одной грани куба.



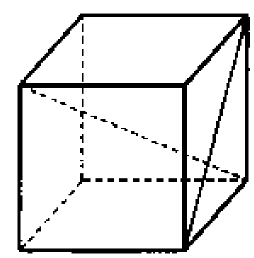
Ответ:

27 Найдите диагональ куба, площадь поверхности которого равна 32.



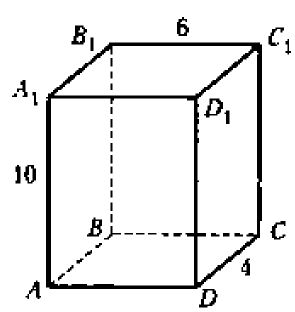
Ответ:

28 Диагональ куба равна $4\sqrt{6}$. Найдите диагональ боковой грани куба.



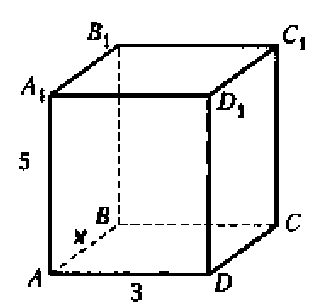
Ответ:

29 По данным на рисунке найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда.



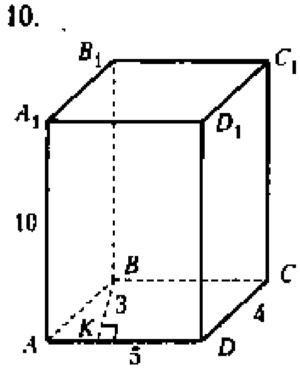
Ответ:

30 Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 94 см^2. Найдите ребро AB.



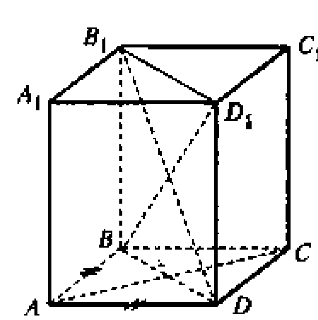
Ответ:

31* $A...D_1$ — прямой параллелепипед. $AD = 5$, $BK \perp AD$, $BK = 3$, $AA_1 = 10$.
Найдите $S_{полн}$.



Ответ:

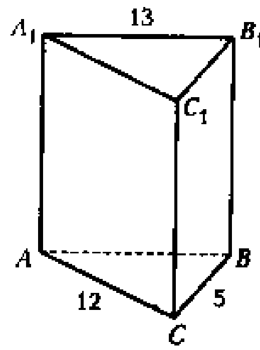
32* $A...D_1$ — прямой параллелепипед. $AB = AD$, $AC = 8$, $BD = 6$, $BD_1 \perp B_1D$.
Найдите $S_{полн}$.



Ответ:

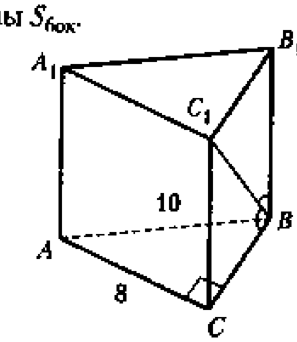
Призма

33 $A...C_1$ — прямая призма, AA_1C_1C — квадрат. Найдите площадь полной поверхности призмы $S_{полн}$.



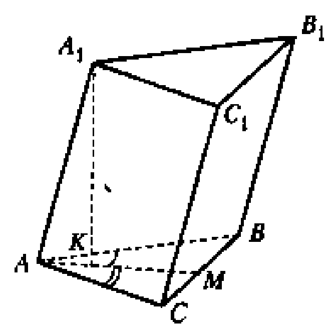
Ответ:

34 $A...C_1$ — прямая призма, BC_1 — биссектриса угла CBB_1, $\angle ACB = 90°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы $S_{бок}$.



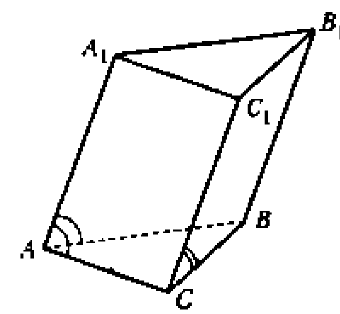
Ответ:

35* $A...C_1$ — наклонная призма, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, A_1K — высота призмы, $\angle BAM = 32°$.
Найдите $\angle MAC$.



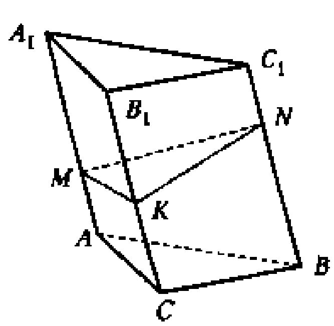
Ответ:

36* $A...C_1$ — наклонная призма, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, $AB = AC$.
Найдите $\angle C_1CB$.



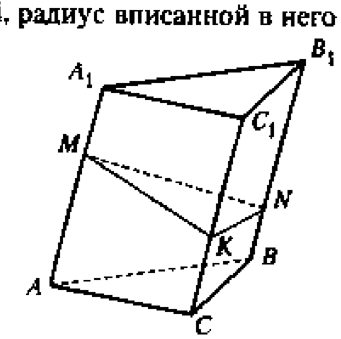
Ответ:

37* $A...C_1$ — призма, сечение MNK перпендикулярно боковому ребру, которое равно 12. Периметр сечения 10.
Найдите $S_{бок}$.



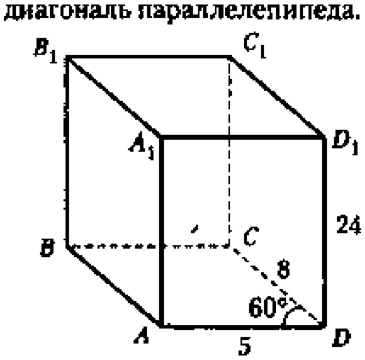
Ответ:

38* $A...C_1$ — призма, сечение MNK перпендикулярно боковому ребру, которое равно 10. Площадь сечения 24, радиус вписанной в него окружности равен 2.
Найдите $S_{бок}$.



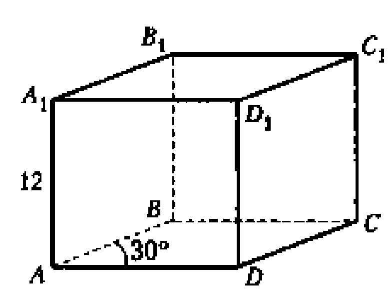
Ответ:

39* $A...D_1$ — прямой параллелепипед, $AD = 5$, $DC = 8$, $DD_1 = 24$, $\angle ADC = 60°$.
Найдите меньшую диагональ параллелепипеда.



Ответ:

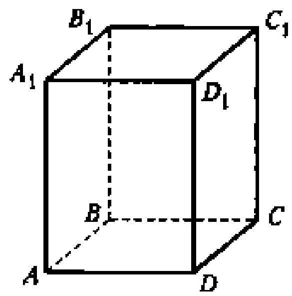
40* $A...D_1$ — прямой параллелепипед, меньшая диагональ параллелепипеда равна 13, $AA_1 = 12$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг ΔABD.



Ответ:

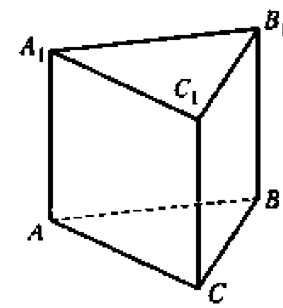
Призма

41 $A...D_1$ — правильная призма, периметр боковой грани равен 36, площадь основания — 64. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



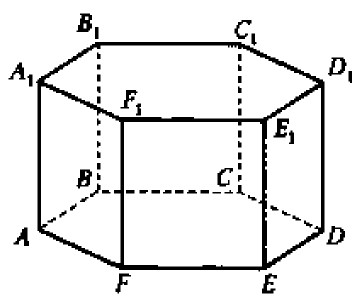
Ответ:

42 $A...D_1$ — правильная призма, периметр основания равен 24, периметр боковой грани — 36. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



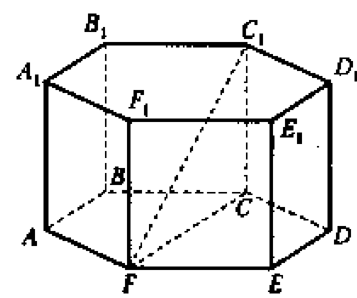
Ответ:

43* $A...F_1$ — правильная призма, у которой равны все ребра, а площадь основания равна $24\sqrt{3}$. Найдите $S_{бок}$.



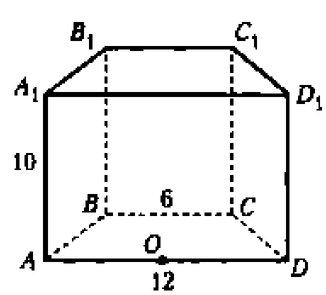
Ответ:

44* $A...F_1$ — правильная призма, $FC = 20$, $FC_1 = 25$. Найдите $S_{бок}$.



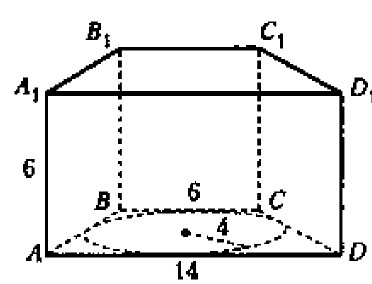
Ответ:

45* $A...D_1$ — прямая призма, $ABCD$ — трапеция, O — центр окружности, описанной около основания. $A_1D_1 = 12$, $BC = 6$, $AA_1 = 10$. Найдите $S_{бок}$.



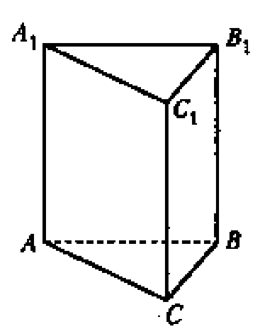
Ответ:

46* $A...D_1$ — прямая призма, $ABCD$ — трапеция, радиус окружности, вписанной в основание, равен 4. $AD = 14$, $BC = AA_1 = 6$. Найдите $S_{полн}$.



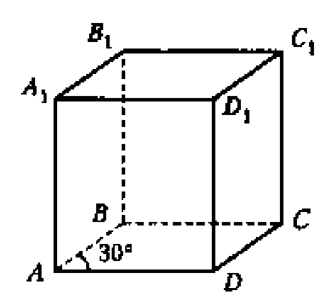
Ответ:

47* $A...C_1$ — правильная призма, $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$. Радиус окружности, описанной вокруг грани AA_1C_1C, равен 5. Найдите $S_{бок}$.



Ответ:

48* $A...C_1$ — прямой параллелепипед, $\angle BAB = 30°$. Радиус окружности, вписанной в четырехугольник DD_1C_1C, равен 2. Найдите $S_{полн}$.

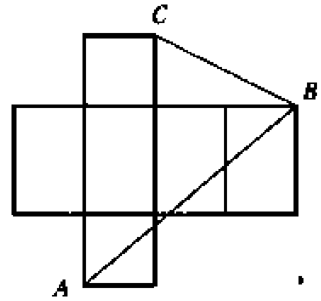


Ответ:

3 Зак. 2291

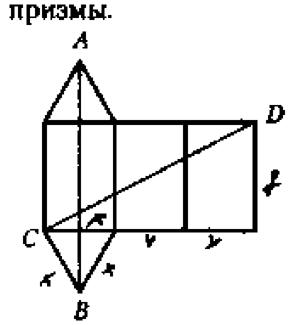
Призма

49* Дана развертка правильной призмы, $AB=\sqrt{61}$, $BC=\sqrt{20}$.
Найдите квадрат диагонали призмы.



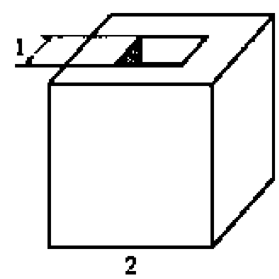
Ответ:

50* Дана развертка правильной призмы. $AB=CD=\sqrt{48}$.
Найдите квадрат высоты призмы.



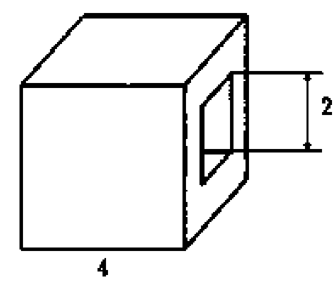
Ответ:

51* В кубе с ребром 2 см проделано сквозное отверстие квадратного сечения со стороной 1 см. Найдите площадь поверхности полученного многогранника.



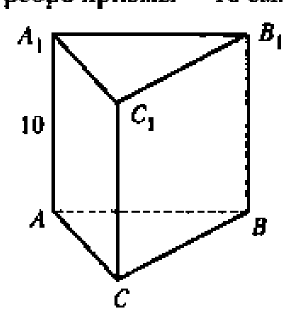
Ответ:

52* В кубе с ребром 4 см проделано сквозное отверстие квадратного сечения со стороной 2 см. Найдите площадь поверхности полученного многогранника.



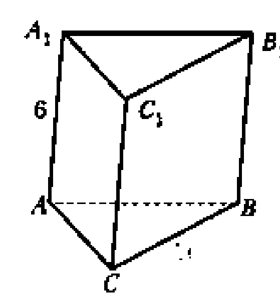
Ответ:

53* Две боковые грани прямой треугольной призмы перпендикулярны, их площади равны 80 см^2 и 150 см^2. Боковое ребро призмы — 10 см. Найдите $S_{бок}$.



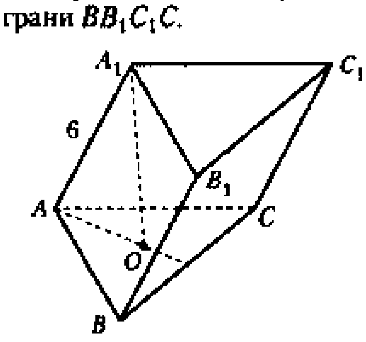
Ответ:

54* Две боковые грани наклонной треугольной призмы перпендикулярны, их площади равны 18 см^2 и 24 см^2. Боковое ребро призмы — 6 см. Найдите $S_{бок}$.



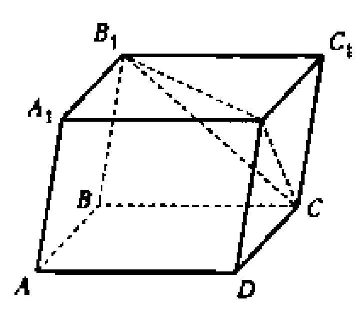
Ответ:

55* $A...C_1$ — наклонная призма, $AB=BC=AC=8$. A_1O — высота, O — центр основания, $AA_1=6$. Найдите площадь грани BB_1C_1C.



Ответ:

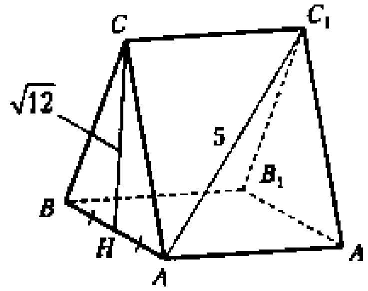
56* $A...D_1$ — наклонный параллелепипед, $C_1B_1D_1C$ — правильный тетраэдр с площадью поверхности 60. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.



Ответ:

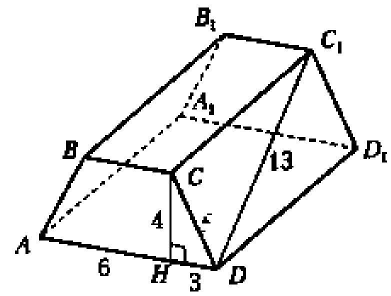
Призма

57 $A...C_1$ – правильная призма, $CH = \sqrt{12}$, $AC_1 = 5$.
Найдите $S_{бок}$.



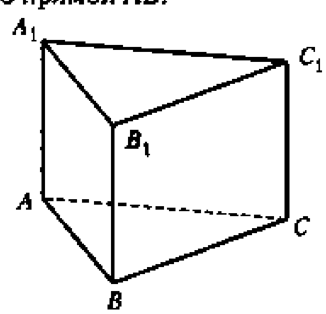
Ответ:

58 $A...D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – равнобедренная трапеция.
По данным на рисунке найдите $S_{бок}$.



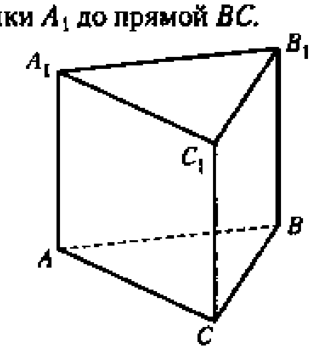
Ответ:

59 Расстояние от вершины C_1 правильной треугольной призмы до плоскости AA_1B_1B равно 8 см, до плоскости ABC – 6 см. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой AB.



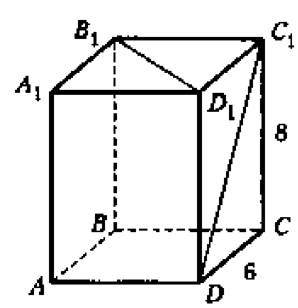
Ответ:

60 Все боковые грани правильной треугольной призмы – квадраты площадью 28 см^2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC.



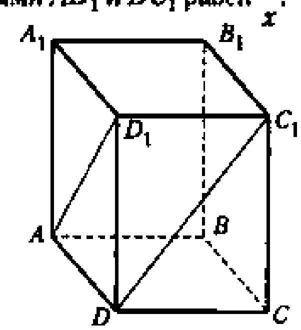
Ответ:

61* $A...D_1$ – правильная призма, $CC_1 = 8$, $DC = 6$. Косинус угла между прямыми B_1D_1 и DC_1 равен $\dfrac{3\sqrt{2}}{x}$.
Найдите x.



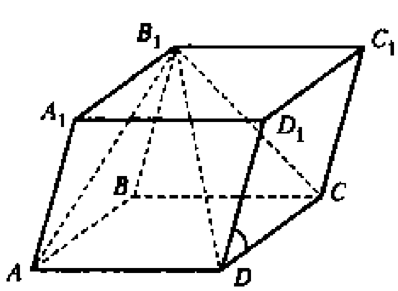
Ответ:

62* $A...D_1$ – правильная призма, $CC_1 = 2DC$. Косинус угла между прямыми AD_1 и DC_1 равен $\dfrac{4}{x}$.
Найдите x.



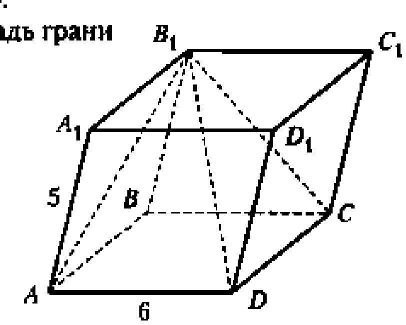
Ответ:

63* $A...D_1$ – наклонный параллелепипед, все ребра пирамиды B_1ABCD равны между собой. Найдите величину угла D_1DC.



Ответ:

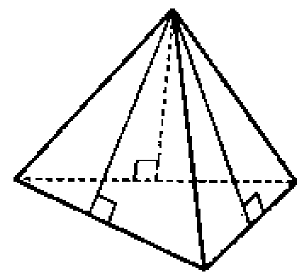
64* $A...D_1$ – наклонный параллелепипед, точка B_1 равноудалена от вершин квадрата $ABCD$, $AD = 6$, $AA_1 = 5$.
Найдите площадь грани DD_1C_1C.



Ответ:

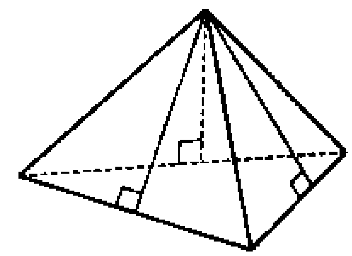
Пирамида

65 Стороны основания пирамиды равны 4; 7 и 9. Высоты боковых граней, проведенные к ребрам основания, равны по 8. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



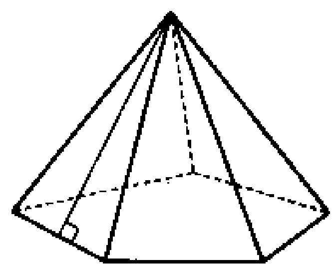
Ответ:

66 Высоты боковых граней тетраэдра, проведенные из его вершины, равны 3; 5 и 7. Основание пирамиды — равносторонний треугольник с периметром 18. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



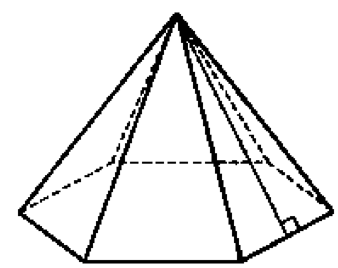
Ответ:

67 Дана правильная пятиугольная пирамида, ребро основания равно 6, апофема — 7. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



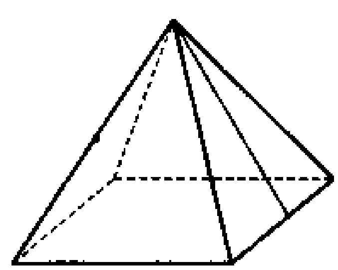
Ответ:

68 Дана правильная шестиугольная пирамида, ребро основания которой равно 5, площадь боковой поверхности пирамиды — 120. Найдите длину апофемы.



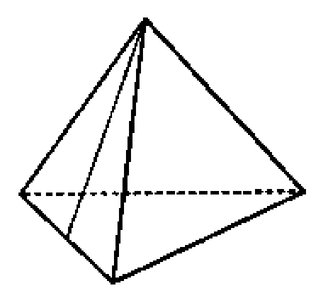
Ответ:

69 Периметр основания правильной четырехугольной пирамиды — 24 см, апофема пирамиды — 5 см. Найдите площадь одной боковой грани.



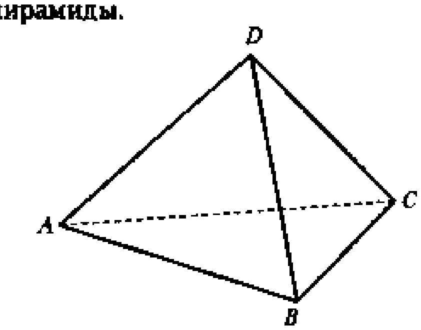
Ответ:

70 Площадь одной боковой грани правильной треугольной пирамиды — 6 см, апофема пирамиды — 4 см. Найдите периметр ее основания.



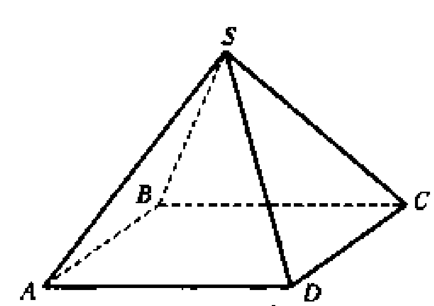
Ответ:

71* Боковые ребра пирамиды $DABC$ равны по 5. $AB = AC = 8$, $BC = 6$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ:

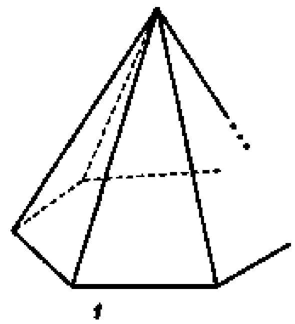
72* Боковые ребра пирамиды равны по 10, основание $ABCD$ — прямоугольник, $AC = BD = 12\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ:

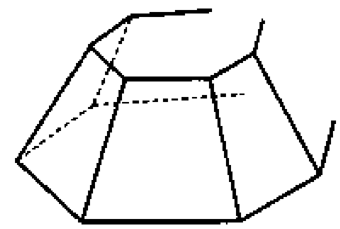
Пирамида

73 Дана восьмиугольная пирамида. Сколько у нее граней?



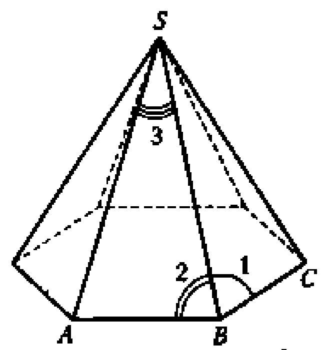
Ответ:

74 Дана двадцатиугольная усеченная пирамида. Сколько у нее ребер?



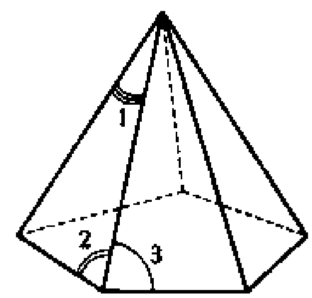
Ответ:

75 Дана правильная пирамида. Сумма плоских углов 1 и 2 равна 160°. Найдите угол 3.



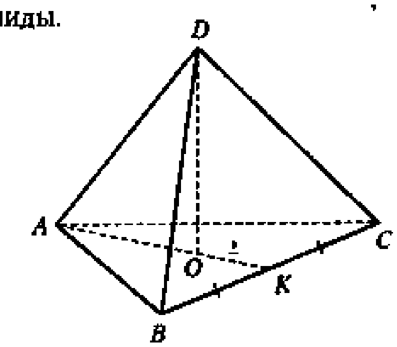
Ответ:

76 Дана правильная пирамида. Сумма плоских углов 1 и 3 равна 105°. Найдите угол 2.



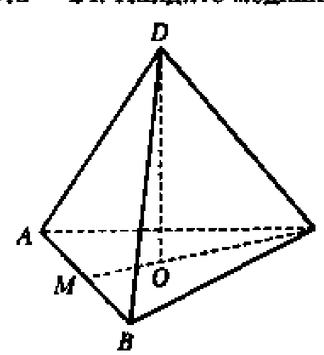
Ответ:

77 Дана правильная пирамида $DABC$, боковое ребро равно 10, медиана основания – 9. Найдите высоту пирамиды.



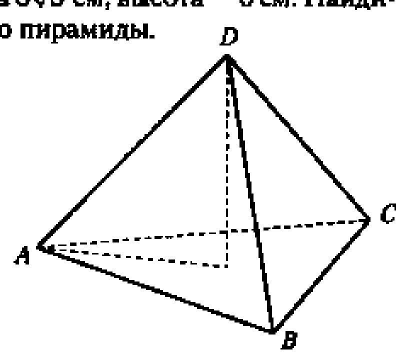
Ответ:

78 Дана правильная пирамида $DABC$, ее апофема равна 25, высота – 24. Найдите медиану основания.



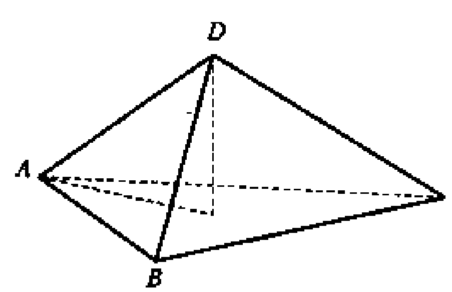
Ответ:

79* Дана правильная пирамида $DABC$, сторона основания равна $8\sqrt{3}$ см, высота – 6 см. Найдите боковое ребро пирамиды.



Ответ:

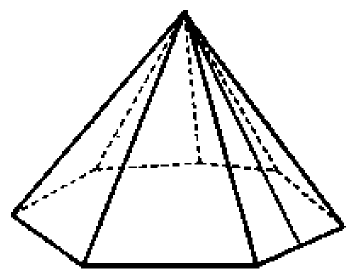
80* Дана правильная пирамида $DABC$, боковое ребро равно 4, угол наклона бокового ребра к основанию равен 30°. Найдите периметр основания.



Ответ:

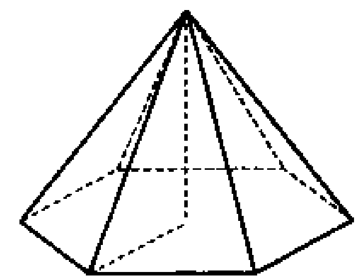
Пирамида

81 Дана правильная семиугольная пирамида. Боковое ребро равно 13, апофема — 12. Найдите периметр основания.



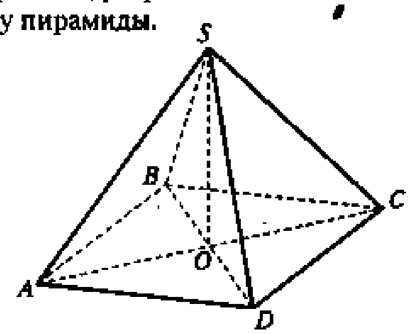
Ответ:

82 Дана правильная шестиугольная пирамида. Боковое ребро равно 24 и составляет с основанием угол 60°. Найдите периметр основания.



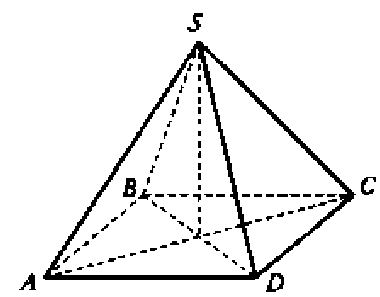
Ответ:

83 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 5, ребро основания — $3\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.



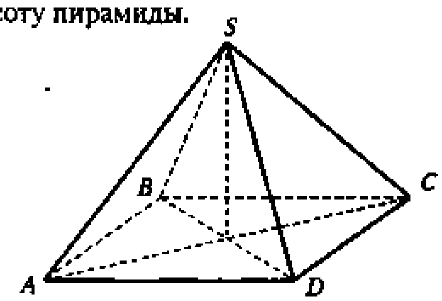
Ответ:

84 Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, боковое ребро — 10. Найдите площадь основания пирамиды.



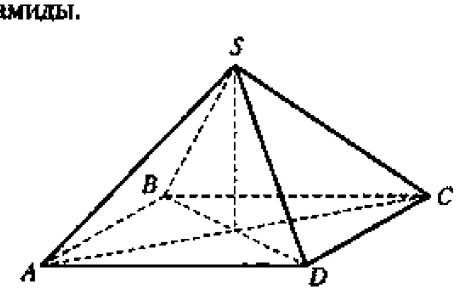
Ответ:

85 Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к основанию под углом 45°. Периметр основания пирамиды 24 см. Найдите высоту пирамиды.



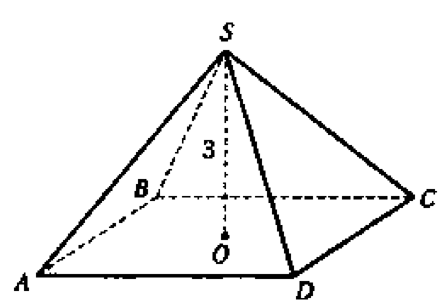
Ответ:

86 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды наклонено к основанию под углом 30°. Периметр основания пирамиды $8\sqrt{6}$ см. Найдите высоту пирамиды.



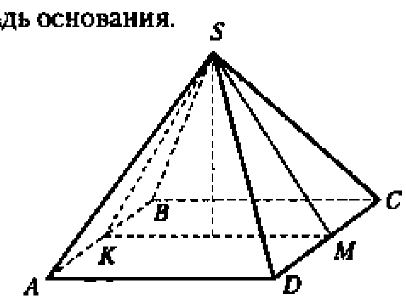
Ответ:

87* $SABCD$ — правильная пирамида, ее высота равна 3, площадь боковой поверхности — 80. Найдите площадь полной поверхности.



Ответ:

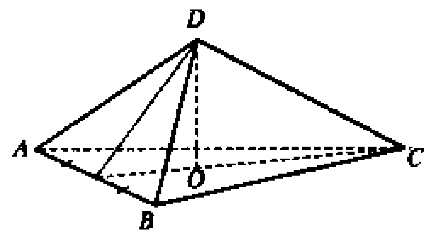
88* $SABCD$ — правильная пирамида, SM и SK — апофемы, $S_{ABCD} = 2S_{KSM}$, площадь боковой поверхности равна $16\sqrt{5}$.
Найдите площадь основания.



Ответ:

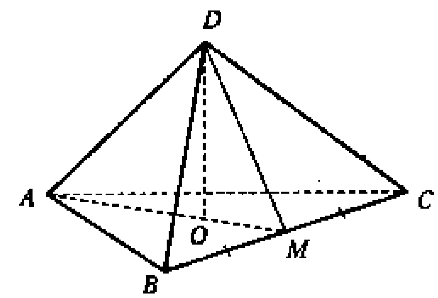
Пирамида

89 $DABC$ — правильная пирамида, угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 45°, высота пирамиды равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около основания.



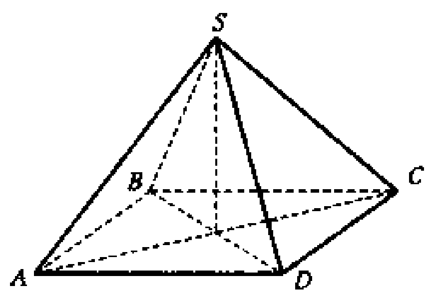
Ответ:

90 $DABC$ — правильная пирамида, двугранный угол при основании равен 60°, радиус окружности, описанной около основания, равен 8. Найдите апофему пирамиды.



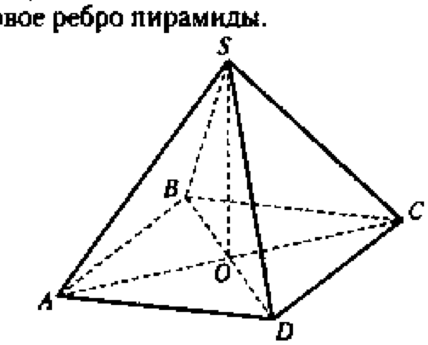
Ответ:

91 Дана правильная пирамида $SABCD$, площадь основания равна 36, высота пирамиды — 4. Найдите апофему пирамиды.



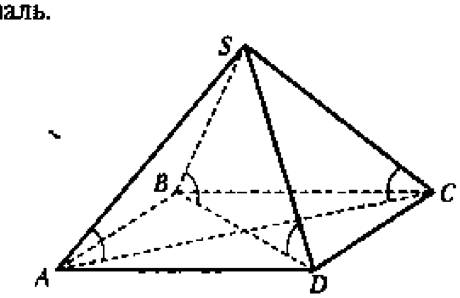
Ответ:

92 Дана правильная пирамида $SABCD$, периметр основания равен 8, высота пирамиды — $\sqrt{7}$. Найдите боковое ребро пирамиды.



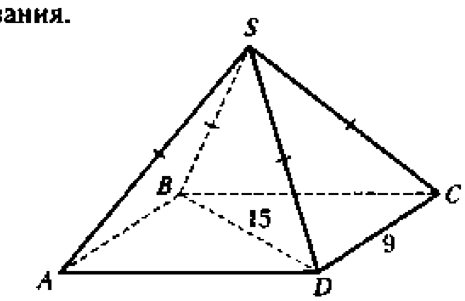
Ответ:

93* Основание пирамиды — параллелограмм, одна диагональ которого равна 10, боковые ребра равно наклонены к основанию. Найдите вторую диагональ.



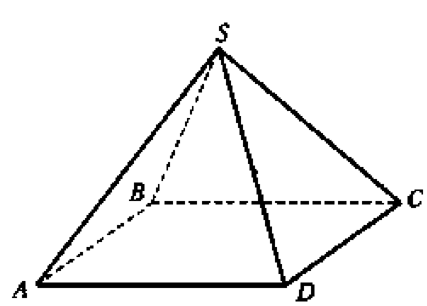
Ответ:

94* Основание пирамиды — параллелограмм со стороной 9 и диагональю 15, боковые ребра пирамиды равны между собой. Найдите периметр основания.



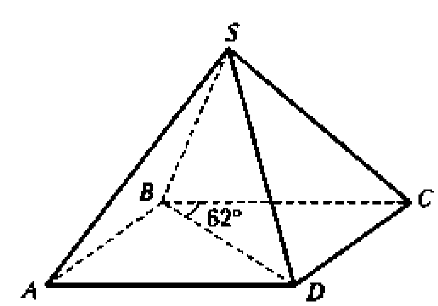
Ответ:

95* $ABCD$ — параллелограмм с периметром, равным 24, двугранные углы при основании равны между собой. Найдите AD.



Ответ:

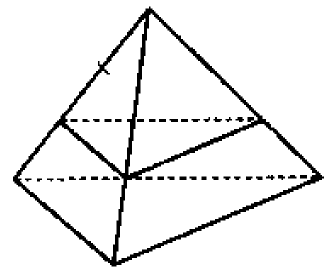
96* $ABCD$ — параллелограмм, углы наклона боковых граней к основанию равны между собой, $\angle DBC = 62°$. Найдите $\angle BAD$.



Ответ:

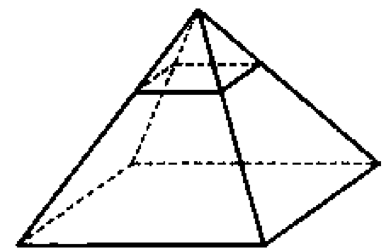
Пирамида

97 Сечение, параллельное основанию пирамиды, делит боковое ребро в отношении 2 : 1, считая от вершины. Площадь сечения — 12 см^2. Найдите площадь основания.



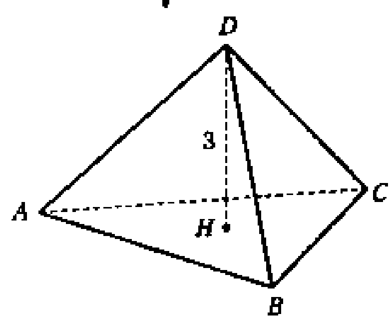
Ответ:

98 Сечение, параллельное основанию пирамиды, делит боковое ребро в отношении 1 : 2, считая от вершины. Площадь основания пирамиды — 72 см^2. Найдите площадь сечения.



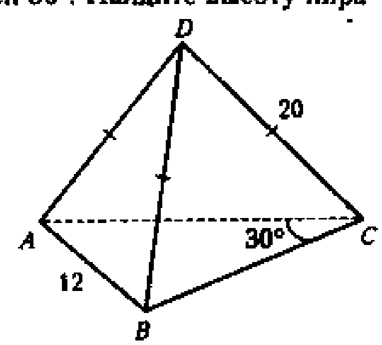
Ответ: 8

99* Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45°, высота пирамиды равна 3, периметр основания — 12. Найдите площадь основания.



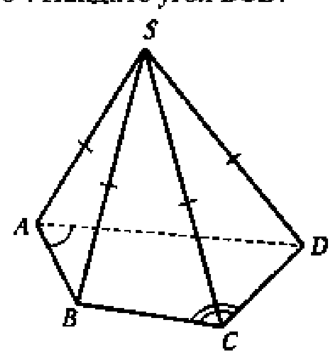
Ответ:

100* Все боковые ребра пирамиды равны по 20, одна из сторон основания — 12, противолежащий ей угол равен 30°. Найдите высоту пирамиды.



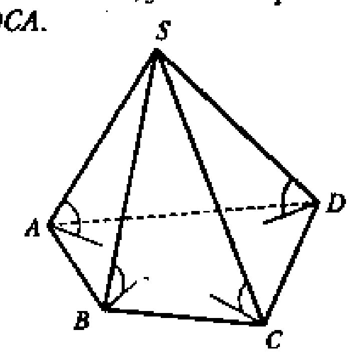
Ответ: 16

101 Все боковые ребра пирамиды $SABCD$ равны, угол BAD равен 48°. Найдите угол BCD.



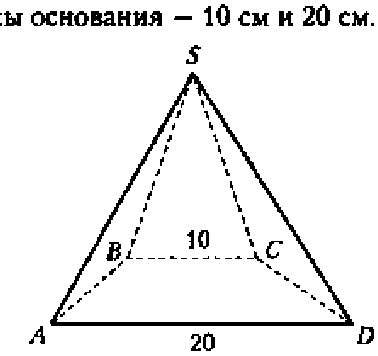
Ответ:

102 У пирамиды $SABCD$ все боковые ребра равно наклонены к основанию, угол ABD равен 68°. Найдите угол DCA.



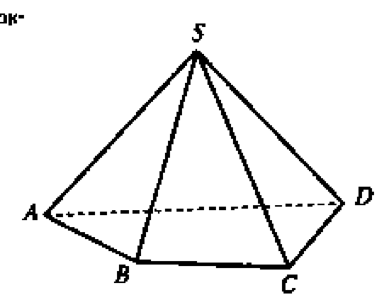
Ответ:

103* Высоты боковых граней пирамиды, проведенные из вершины, равны по 5 см, две противоположные стороны основания — 10 см и 20 см. Найдите $S_{бок}$.



Ответ:

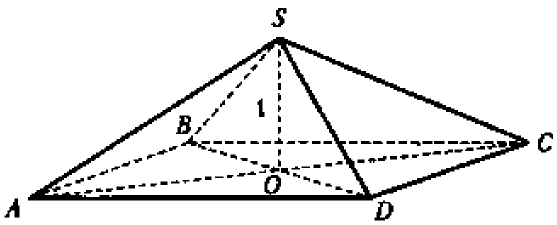
104* Высоты боковых граней пирамиды, проведенные из вершины, равны по 8 см, сумма двух противоположных сторон основания равна 20 см. Найдите $S_{бок}$.



Ответ:

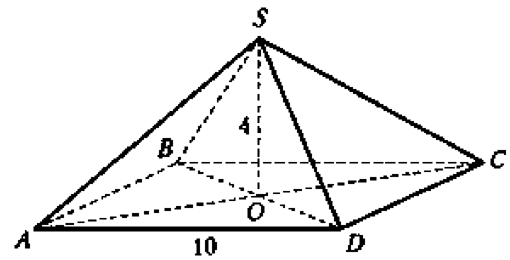
Пирамида

105* Высота $SO = 1$, $ABCD$ — ромб, $AC = 8$, $BD = 6$. Найдите $S_{бок}$.



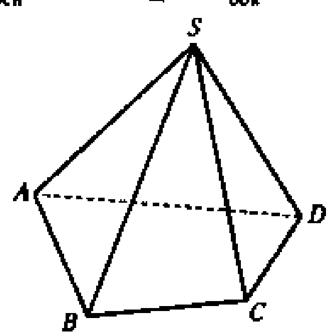
Ответ:

106* Высота $SO = 4$, $ABCD$ — ромб, $S_{осн} = 60$, $AD = 10$. Найдите $S_{бок}$.



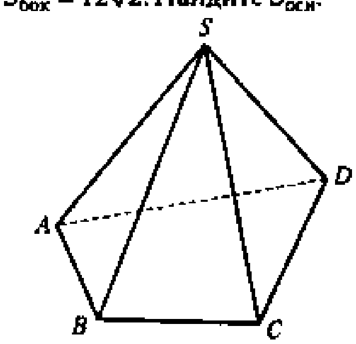
Ответ:

107* Все боковые грани наклонены к основанию под углом 60°, $S_{осн} = 20$. Найдите $S_{бок}$.



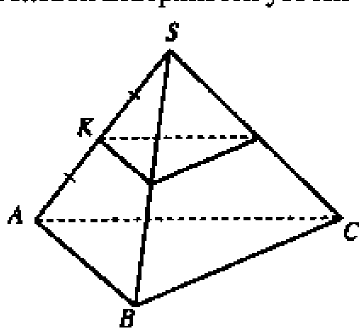
Ответ:

108* Все боковые грани наклонены к основанию под углом 45°, $S_{бок} = 12\sqrt{2}$. Найдите $S_{осн}$.



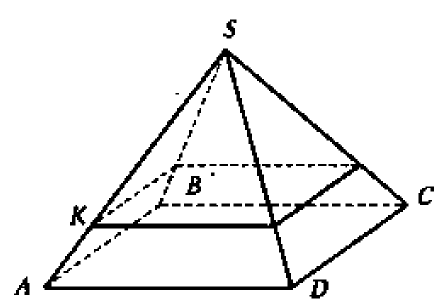
Ответ:

109 Площадь боковой поверхности полной пирамиды $SABC$ равна 48 см^2, K — середина ребра. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.



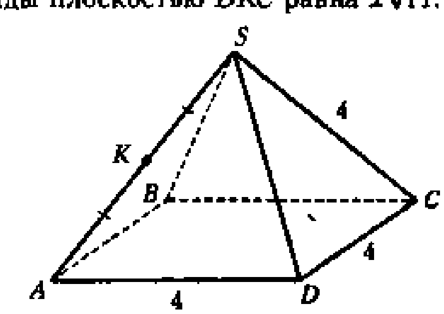
Ответ:

110 Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна 35 см^2, $AK : KS = 1 : 3$. Найдите площадь боковой поверхности полной пирамиды $SABCD$.



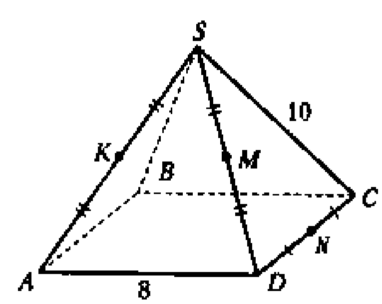
Ответ:

111* Все ребра правильной пирамиды $SABCD$ равны 4, K — середина ребра AS. Площадь сечения пирамиды плоскостью DKC равна $x\sqrt{11}$. Найдите x.



Ответ:

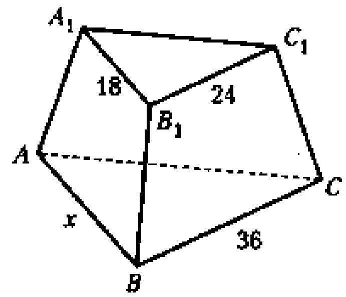
112* $SABCD$ — правильная пирамида, $SC = 10$, $AD = 8$, K, M и N — середины ребер. Площадь сечения пирамиды плоскостью KMN равна $x\sqrt{21}$. Найдите x.



Ответ:

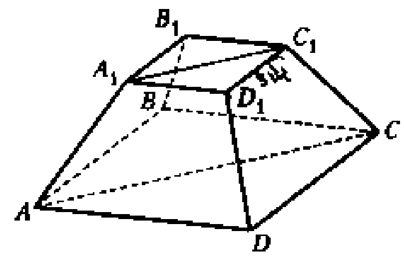
Усеченная пирамида

113 $A...C_1$ — усеченная пирамида, $A_1B_1 = 18$, $B_1C_1 = 24$, $BC = 36$.
Найдите AB.



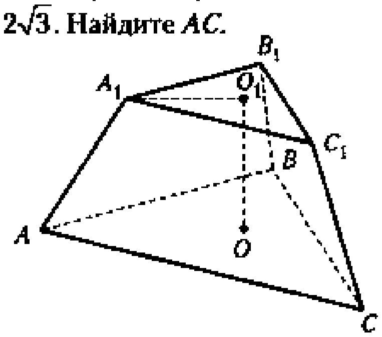
Ответ:

114 $A...C_1$ — правильная усеченная пирамида. $AC = 12$, $A_1C_1 = 6$, $CC_1 = 5$.
Найдите высоту данной пирамиды.



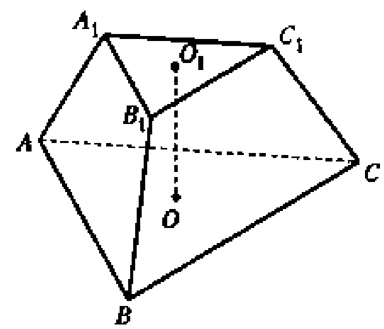
Ответ:

115 $A...C_1$ — правильная усеченная пирамида, ее высота равна 4, O и O_1 — центры оснований, $AA_1 = \sqrt{19}$, $A_1O_1 = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.



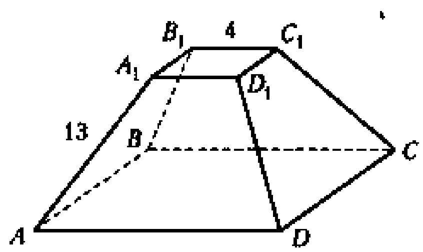
Ответ:

116 $A...C_1$ — правильная усеченная пирамида, O и O_1 — центры оснований, $AB = 6\sqrt{3}$, $A_1B_1 = 3\sqrt{3}$, $OO_1 = 4$.
Найдите AA_1.



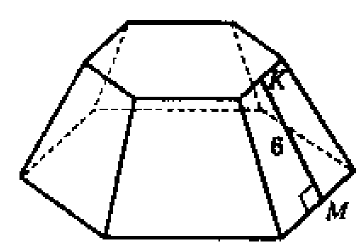
Ответ:

117 $A...D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида, $AD = 14$, $B_1C_1 = 4$, $AA_1 = 13$.
Найдите $S_{бок}$.



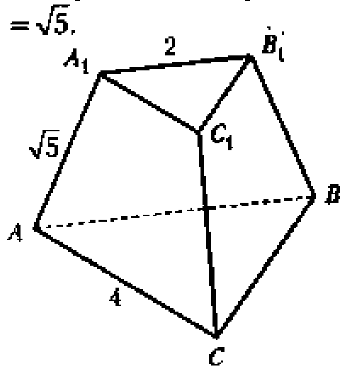
Ответ:

118 Дана правильная шестиугольная усеченная пирамида. Стороны оснований 4 и 5, $KM = 6$.
Найдите $S_{бок}$.



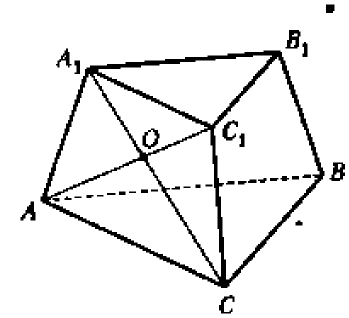
Ответ:

119 $A...D_1$ — правильная усеченная пирамида, $AC = 4$, $A_1B_1 = 2$, $AA_1 = \sqrt{5}$.
Найдите $S_{бок}$.



Ответ:

120 $A...D_1$ — правильная усеченная пирамида, $AC_1 = 6$, $AC_1 \perp A_1C$.
Найдите $S_{бок}$.

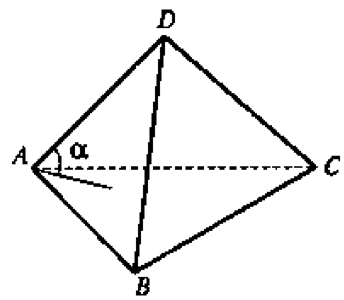


Ответ:

Правильные многогранники

(121) *DABC* — правильный тетраэдр, α — угол наклона бокового ребра к основанию. Косинус α равен:

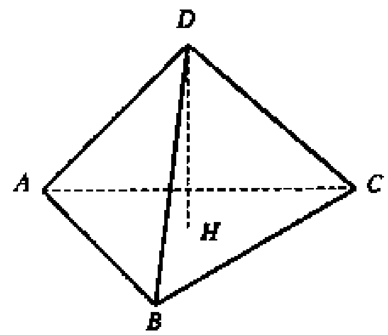
1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$;
3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



Ответ:

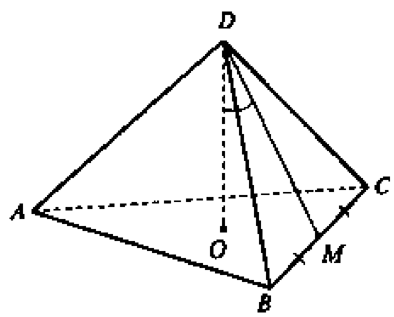
(122) *DABC* — правильный тетраэдр со стороной *a*, *DH* — высота тетраэдра. Высота равна:

1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$;
3) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 4) $a\sqrt{3}$.



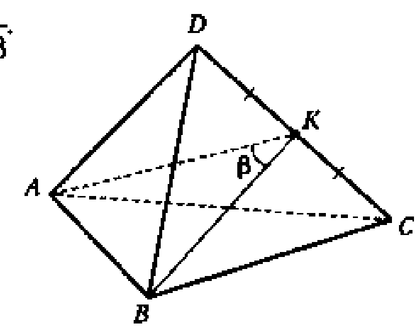
Ответ:

(123) *DABC* — правильный тетраэдр, *DO* — высота, *DM* — апофема, $\angle ODM = \alpha$.
Найдите $\frac{1}{\sin^2\alpha}$.



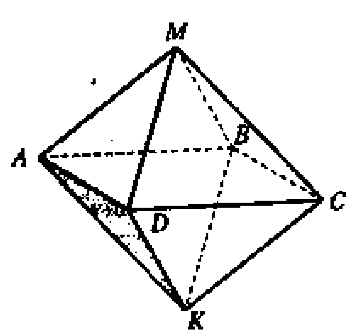
Ответ:

(124) *DABC* — правильный тетраэдр, *K* — середина ребра *DC*. $\angle AKB = \beta$.
Найдите $\frac{1}{\cos^2\beta}$.



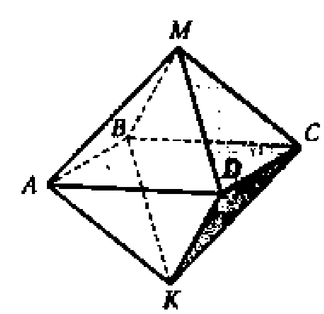
Ответ:

(125) Дан октаэдр. Найдите величину угла *MAK*.



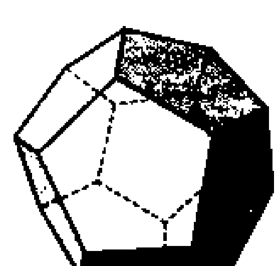
Ответ:

(126) Дан октаэдр с ребром, равным $4\sqrt{2}$. Найдите длину отрезка *MK*.



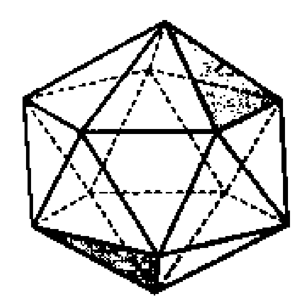
Ответ:

(127) Дан додекаэдр, площадь одной грани равна 12. Найдите площадь поверхности додекаэдра.



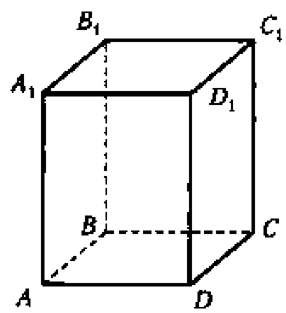
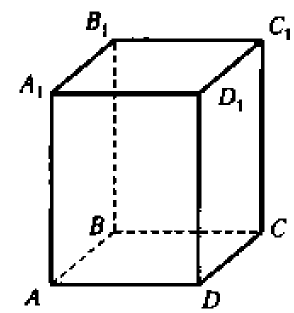
Ответ:

(128) Дан додекаэдр, площадь полной поверхности равна 360. Найдите площадь одной грани.



Ответ:

Контрольная работа по теме «Многогранники»

Вариант 1	Вариант 2
(1) Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, то по определению основание $ABCD$: 1) параллелограмм; 2) прямоугольник; 3) квадрат; 4) четырехугольник.  *Ответ*:	**(1)** Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма, то по определению основание $ABCD$: 1) параллелограмм; 2) прямоугольник; 3) квадрат; 4) четырехугольник.  *Ответ*:
(2) Дана правильная треугольная призма. Периметр основания призмы равен 12 см, диагональ боковой грани — 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы. *Ответ*:	**(2)** Дана правильная треугольная призма. Периметр основания призмы равен 18 см, диагональ боковой грани — 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы. *Ответ*:
(3) Дан прямоугольный параллелепипед, два измерения которого равны 4 и 12, диагональ — 13. Найдите площадь его полной поверхности. *Ответ*:	**(3)** Дан прямоугольный параллелепипед, два измерения которого равны 9 и 12, диагональ — 17. Найдите площадь его полной поверхности. *Ответ*:
(4) Дана правильная четырехугольная пирамида. Площадь основания пирамиды равна 36 см^2, площадь боковой поверхности — 48 см^2. Найдите высоту пирамиды. *Ответ*:	**(4)** Дана правильная четырехугольная пирамида. Площадь основания пирамиды равна 100 см^2, площадь боковой поверхности — 260 см^2. Найдите высоту пирамиды. *Ответ*:
(5) Все двугранные углы при основании тетраэдра равны по 60°. Стороны основания равны 20 см, 21 см, 29 см. Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра. *Ответ*:	**(5)** Углы между высотой тетраэдра и высотами боковых граней, проведенных из вершины пирамиды, равны по 30°. Стороны основания равны 12 см, 9 см, 15 см. Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра. *Ответ*:

ТЕМА 2

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

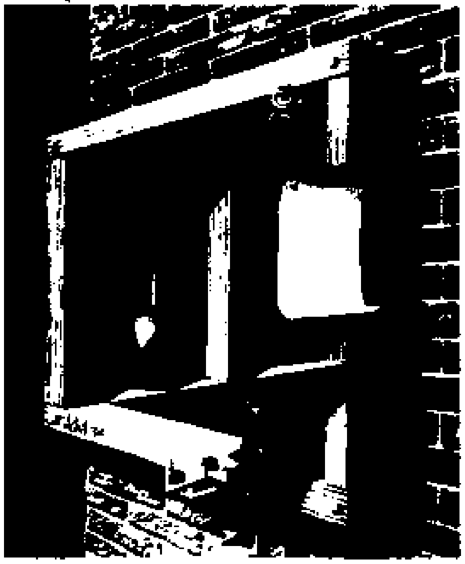
Иосиф Бродский,
русский поэт,
лауреат Нобелевской премии по литературе,
один из гениев XX века

А. А. Ахматовой

***

Какая наступает тишина
в прекрасном обрамлении окна,
когда впотьмах, недвижимый весь век,
как маятник, качнется человек,
и в тот же час, снаружи и внутри,
возникнет свет, внезапный для зари,
и ровный звон над копьями оград,
как будто это новый циферблат
вторгается, как будто не спеша
над плотью воцаряется душа,
и алый свет, явившийся извне,
внезапно воцаряется в окне,
внезапно растворяется окно,
как будто оживает полотно.

***



Картина Жоса де Мея*

*http://artgalereya.mirtesen.ru/blog/43734079501
http://klementeena.ru/?p=619
http://mp3lemon.net/listenalbum/323/

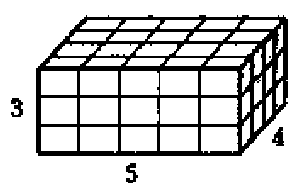
ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

Будем понимать объем как количество занимаемого геометрическим телом пространства. Единицей объема является объем куба с ребром, равным 1. Объем куба с ребром, равным 1 см, равен 1 см^3, объем куба с ребром, равным 1 м, равен 1 м^3 и т. д. Находя объем тела, мы фактически выясняем, сколько единичных кубов он вмещает.

Например, пусть дан прямоугольный параллелепипед с измерениями 5 см, 4 см и 3 см.

Разобьем параллелепипед плоскостями, параллельными основаниям, на 3 слоя высотой по 1 см.

В каждом слое будет содержаться $5\times4=20$ единичных кубов, а в трех слоях $20\times3=60$. Значит, объем такого параллелепипеда равен $5\cdot4\cdot3$ см^3.



Проведя похожие рассуждения для *прямоугольного параллелепипеда* с измерениями a, b, c, придем к выводу, что его объем равен произведению трех измерений (линейных размеров), т. е. $V=abc$.

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту (это мы докажем), *объем произвольной призмы* также равен произведению площади основания на высоту, т. е. $V_{пр}=S_{осн}\cdot h$ (это мы тоже докажем).

А вот *объем пирамиды* равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту, т. е. $V_{пир}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$.

Мы примем эту формулу без доказательства.

Объем призмы

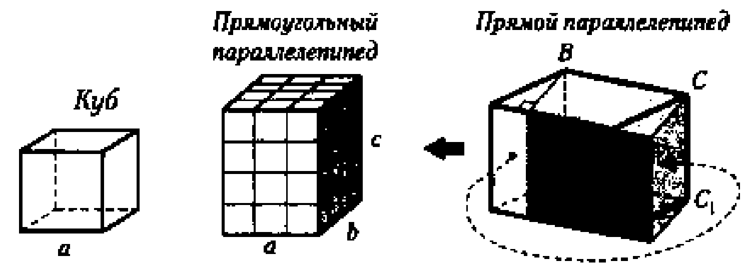
Объем прямоугольного параллелепипеда

Объем куба с ребром a находится по формуле $V=a^3$.

Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b и c находится по формуле $V=abc$.

Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда a, b и c — целые числа. Разобьем параллелепипед плоскостями, параллельными основаниям, на c слоев. В каждом слое будет $a\cdot b$ кубов, всего кубов $a\cdot b\cdot c$, объем данного параллелепипеда $V=abc$. Формула также верна, если a, b и c — не целые числа.

Объем прямого параллелепипеда



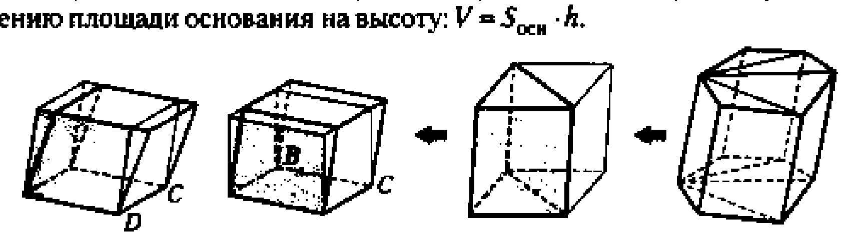
$\boxed{V_к=a^3}$ $\boxed{V=abc}$

$V_{прямого}=V_{прямоугольного}=(a\cdot b)\cdot c=S_{осн}\cdot h$

Плоскостью, проходящей через ребро BB_1 и перпендикулярной B_1C_1, отсечем прямую треугольную призму и переместим ее так, чтобы ребро BB_1 совпало с ребром CC_1. Получим прямоугольный параллелепипед *с тем же объемом, с той же высотой и той же площадью основания*. Поэтому объем прямого параллелепипеда $V=S_{осн}\cdot h$.

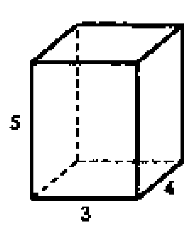
Объем наклонного параллелепипеда

Дважды отсекая от наклонного параллелепипеда треугольную призму плоскостью, перпендикулярной основанию: проходящей через ребро DC (шаг 1), а затем через ребро BC (шаг 2), и перемещая отсеченные призмы к противоположной стороне основания, получим прямой параллелепипед *с тем же объемом, той же высотой и той же площадью основания*, что и у данного наклонного параллелепипеда. Поэтому объем наклонного параллелепипеда, как и прямого параллелепипеда, равен произведению площади основания на высоту: $V=S_{осн}\cdot h$.



Шаг 1 Шаг 2 Шаг 3 Шаг 4

Запомните!



Объем *прямоугольного параллелепипеда* равен произведению трех его измерений: $\boxed{V=abc}$

Объем любой призмы равен произведению площади основания на высоту: $\boxed{V_{пр}=S_{осн}\cdot h}$

Пример. В основании прямой призмы с высотой 5 см лежит прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Объем призмы $V=S_{осн}\cdot h=(3\cdot4)\cdot5=60$ (см^3).

Объем наклонной треугольной призмы

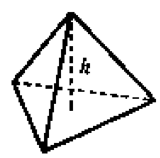
Достроим данную треугольную призму до параллелепипеда (см. рис. выше), проведя через два боковых ребра плоскости, параллельные противоположным боковым граням (шаг 3). В пересечении с плоскостями оснований призмы получим призму, равную данной. Так как объем фигуры равен сумме объемов ее частей, то объем треугольной призмы равен половине объема параллелепипеда: $V_{\text{треуг пр}} = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Объем произвольной наклонной призмы

Диагональные плоскости, проходящие через боковое ребро призмы, разбивают ее на треугольные призмы равной высоты (шаг 4). Так как объем фигуры равен сумме объемов ее частей, то объем произвольной призмы равен произведению площади основания на высоту:

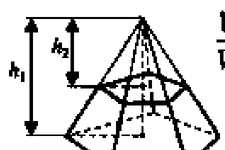
$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = S_1 h + S_2 h + \ldots + S_n \cdot h = (S_1 + S_2 + \ldots S_n)h = S_{\text{осн}} h.$$

Объем пирамиды



$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h}$$

Параллельное сечение



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1^3}{h_2^3} \Rightarrow V_{\text{ус пир}} = V_1 - V_2$$

$$\boxed{V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}$$

Объем пирамиды находится по формуле $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.

Примем без доказательства тот факт, что объем треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту. Любая n-угольная пирамида разбивается диагональными плоскостями на треугольные пирамиды с общей высотой. Так как объем фигуры равен сумме объемов ее частей, то объем произвольной пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту.

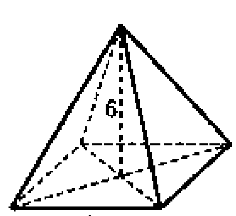
Параллельное сечение пирамиды.

Плоскость, параллельная основанию, отсекает от данной пирамиды ей подобную. Объемы этих пирамид относятся как кубы их высот:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_{\text{осн}1} \cdot h_1}{\frac{1}{3} S_{\text{осн}2} \cdot h_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1^3}{h_2^3}.$$

Объем усеченной пирамиды равен разности объемов полной и отсеченной пирамиды, или $V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.

Запомните!



Объем пирамиды равен произведению одной третьей площади основания на высоту: $\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h}$

Пример. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, высота — 6 см. Ее объем

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ (см}^3\text{)}.$$

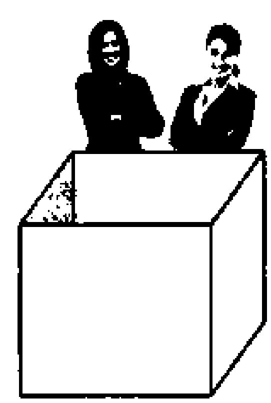
Задача-парадокс!

Как вам кажется, сколько гимнасток весом по 50 кг каждая можно поместить в картонную коробку в форме куба с ребром 1 м?

а) 2; б) 4;
в) 10; г) 20;
д) 50.

Решение.

50 — это, конечно, слишком, а вот 20 — это правильный ответ. Теперь о том, как можно к такому заключению прийти. Известно, что плотность тела человека близка к плотности воды, т. е. приблизительно равна 1 кг/дм^3. Действительно, набрав немного воды в легкие и зажав колени руками, мы можем «поплавком» находиться в воде. Таким образом, 1 кг нашего тела занимает объем 1 дм^3. Тогда объем гимнастки весом 50 кг приблизительно равен 50 дм^3. Так как 1 м^3 равен $10 \times 10 \times 10 = 1000$ дм^3, то в коробку поместятся (теоретически) $1000 : 50 = 20$ гимнасток!



1 м

Простые и непростые вопросы

1. Чему равна длина ребра куба с объемом 64 см^3?
2. На сколько кубиков с длиной ребра 1 дм можно распилить куб с ребром 1 м?
3. Сколько кубиков с длиной ребра 1 см содержит прямоугольный параллелепипед с размерами 3 см на 4 см на 5 см?
4. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4 см, 5 см и 6 см?
5. Объем прямого параллелепипеда с высотой 10 см равен 200 см^3. Чему равна площадь его основания?
6. В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Высота параллелепипеда равна диагонали основания. Чему равен объем параллелепипеда?
7. Объем пятиугольной наклонной призмы равен G, площадь основания равна Q. Чему равна высота призмы?
8. Периметр основания правильной четырехугольной призмы равен P, высота k. Чему равен объем призмы?
9. Каждое ребро куба увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличился объем куба?
10. Стороны основания параллелепипеда уменьшили в 2 раза, а высоту параллелепипеда увеличили в 2 раза. Как изменился его объем?
11. Площадь основания пирамиды равна 30 см^2, высота пирамиды — 10 см. Чему равен объем пирамиды?
12. Периметр основания правильной четырехугольной пирамиды равен 12 см, высота пирамиды равна ребру основания. Чему равен объем пирамиды?
13. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 120 см^3. Чему равен объем пирамиды A_1ABCD?
14. Дана пирамида объемом 40 см^3. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. Чему равен объем отсеченной пирамиды?
15. Сколько кубиков в кубике Рубика?

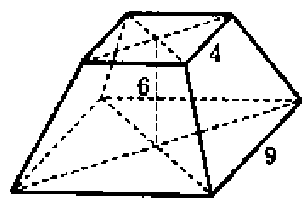
Повышенный уровень

* **Объемы подобных фигур** относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.
* **Объем усеченной пирамиды** равен сумме объемов трех пирамид с той же высотой и основаниями, одно из которых равно большему основанию усеченной пирамиды, второе — меньшему основания, третье — среднему арифметическому двух первых оснований (ключевая задача 10):

$$V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}\sqrt{S_1S_2}\cdot h = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right).$$

Задача*

Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 9 см, высота пирамиды равна 6 см. Найдите объем пирамиды.



Решение.

Воспользуемся формулой объема усеченной пирамиды

$$V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right).$$

Тогда

$$S_1 = a^2 = 9^2 = 81\ (\text{см}^2),\ S_2 = b^2 = 4^2 = 16\ (\text{см}^2),$$

$\sqrt{S_1S_2} = \sqrt{9\cdot 16} = 12\ (\text{см}^2)$.

Получим $V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot(81+12+16) = 218\ (\text{см}^3)$.

Ответ: 218 см^3.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объем куба с ребром a.
2. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c.
3. Объем прямого параллелепипеда. Доказательство.
4. Объем наклонного параллелепипеда. Доказательство*.
5. Объем треугольной призмы. Доказательство.
6. Объем произвольной n-угольной призмы. Доказательство.
7. Объем треугольной пирамиды. Без доказательства.
8. Объем n-угольной пирамиды. Доказательство.
9. Объем усеченной пирамиды как разность объемов.
10*. Отношение объемов подобных фигур.
11*. Формула объема усеченной пирамиды.

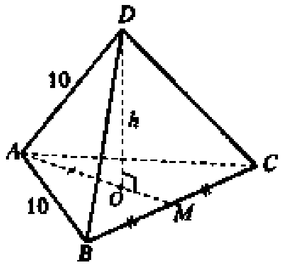
Запомните!

Объем** усеченной пирамиды **можно найти по формуле

$$\boxed{V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)}$$

Главная задача темы

Найти объем правильного тетраэдра с ребром $a = 10$ см.



Решение. Объем любой пирамиды находится по формуле $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$.

Все ребра правильного тетраэдра равны между собой. Поэтому треугольник ABC — равносторонний со стороной 10 см. Его площадь $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ (см²).

Опустим высоту $DO = h$. Так как $AD = BD = CD = 10$ см, то точка O — центр основания ABC. Центр равностороннего треугольника — это центр описанной окружности и точка пересечения медиан. Так как AM — медиана и медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, то $AO = \frac{2}{3}AM$. По теореме Пифагора $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (см).

Тогда $AO = \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ (см). Из прямоугольного треугольника AOD находим недостающую нам высоту данного тетраэдра:

$$h = DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{100}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{300-100}{3}} = 10\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (см).}$$

Искомый объем $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{250\sqrt{2}}{3}$ (см³).

Ответ: $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ см³.

$$V_{пр\ тетр} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Что позволяет сократить вычисления?

$AO = R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ (см) — радиус описанной окружности ΔABC.

Найдем приближенное значение указанного объема с учетом $\sqrt{2} \approx 1{,}41$: $\frac{250\sqrt{2}}{3} \approx \frac{250 \cdot 1{,}41}{3} = 117{,}5$ (см³). Если заполнить водой этот тетраэдр, то в него войдет около 117 мл воды — чуть больше, чем полстакана!

Запомните!

Меры объема жидкостей и газов — 1 литр или 1 миллилитр.

1 л = 1 дм³

1 мл = 1 см³

16. Диагональ куба равна $2\sqrt{3}$ см. Чему равен объем куба?
17. Периметр основания правильной четырехугольной призмы равен $4T$, периметр боковой грани — $4G$. Чему равна высота призмы?
18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Объем пирамиды B_1ABCD равен 60 см³. Чему равен объем пирамиды D_1ABCD?
19. Объем какой фигуры меньше: куба с диагональю 3 см или прямоугольного параллелепипеда с размерами 1 см, 2 см и 3 см?
20. Каждое ребро куба уменьшили на 50 %. На сколько процентов уменьшился объем куба?
21. Какую часть объема куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляет объем пирамиды C_1ABC?
22. O — центр верхней грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равно отношение объемов пирамиды $OABCD$ и данного куба?
23. Чему равно отношение объемов пирамид, имеющих общую высоту (равные высоты)?
24. Как называется многогранник, вершины которого являются центрами граней данного куба?
25. Найдите объем пирамидки с чаем, если длина ее ребра 3 см. Ответ округлить до 1 см³.

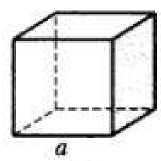
Мировой лидер упаковочной продукции — шведская фирма Tetra Pak. На донышке практически любого картонного пакета с молоком и соком сегодня написано именно «Tetra Pak». Фирма была так названа, поскольку первая придумала и запатентовала картонную упаковку для молока (ранее молоко разливалось в стеклянные бутылки), причем в форме правильного тетраэдра (отсюда название фирмы). Потом появилась упаковка в форме прямоугольного параллелепипеда «Tetra Classic», а затем в форме правильной четырехугольной призмы «Tetra Brik». Интересная математическая задача: на коробку какой формы — Tetra Pak, Tetra Classic или Tetra Brik — пойдет больше картона для объема в 1 л?

4 Зак. 2291

Объем призмы

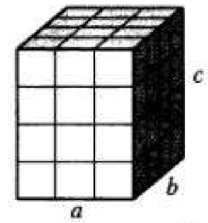
№ 2

$V = a^3$

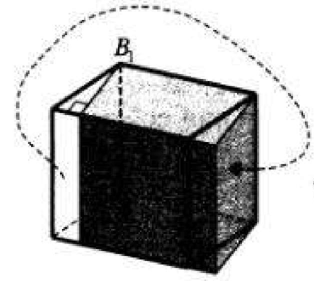


куб

$V = abc$

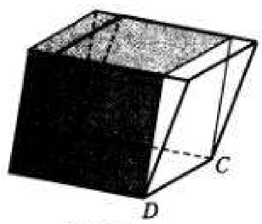


прямоугольный параллелепипед

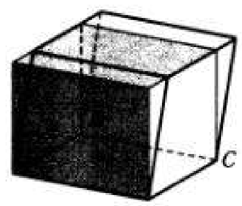


прямой параллелепипед

$$V = S_{осн} \cdot h$$

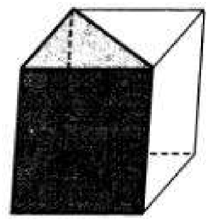


Шаг 1



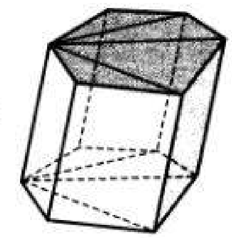
Шаг 2

наклонный параллелепипед



Шаг 3

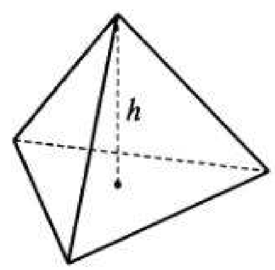
треугольная призма



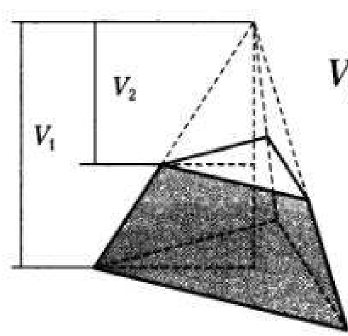
Шаг 4

произвольная призма

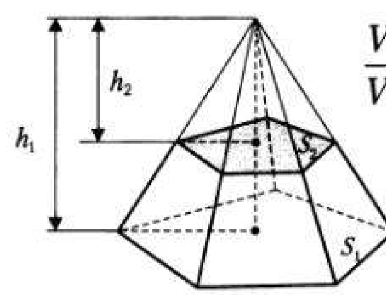
Объем пирамиды



$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$$



$$V_{ус\ пир} = V_1 - V_2$$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1^3}{h_2^3}$$

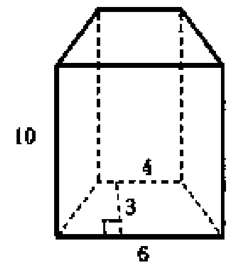
параллельное сечение

$$V_{ус\ пир} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Начальный уровень

№ 1. *В основании прямой четырехугольной призмы лежит трапеция с основаниями 4 см и 6 см и высотой 3 см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Найдите объем призмы.*



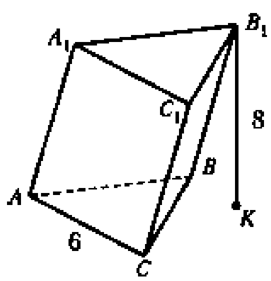
Решение.
Объем любой призмы находится по формуле $V = S_{осн} \cdot h$.

Площадь трапеции находится по формуле $S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Тогда площадь основания призмы $S_{осн} = \frac{4+6}{2} \cdot 3 = 15$ (см^2). Высота прямой призмы равна боковому ребру.

Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h = 15 \cdot 10 = 150$ (см^3).

Ответ: 150 см^3.

№ 2. *В основании наклонной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 6 см. Высота призмы равна 8 см. Найдите объем призмы.*



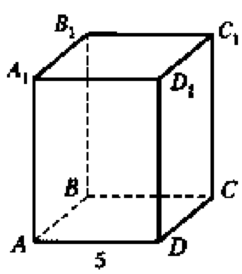
Решение.
Объем любой призмы находится по формуле $V = S_{осн} \cdot h$.

$\triangle ABC$ — равносторонний. Его площадь $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда $S_{осн} = S_{ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см^2). Высота призмы $h = B_1K = 8$ см по условию.

Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3}$ (см^3).

Ответ: $72\sqrt{3}$ см^3.

№ 3. *Ребро основания правильной четырехугольной призмы равно 5 см. Объем призмы равен 200 см^3. Найдите высоту призмы.*

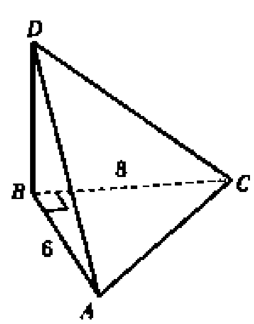


Решение.
Объем любой призмы находится по формуле $V = S_{осн} \cdot h$.

В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат. Поэтому площадь основания призмы $S_{осн} = a^2 = 5^2 = 25$ (см^2). По условию $V = 200$ см^3. Тогда получаем $200 = 25 \cdot h$, откуда $h = \frac{200}{25} = 8$ (см).

Ответ: 8 см.

№ 4. *В пирамиде $DABC$ боковое ребро DB перпендикулярно основанию и равно ребру AC. Треугольник ABC — прямоугольный с катетами $AB = 6$ см и $BC = 8$ см. Найдите объем пирамиды.*



Решение.
Объем любой пирамиды находится по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$.

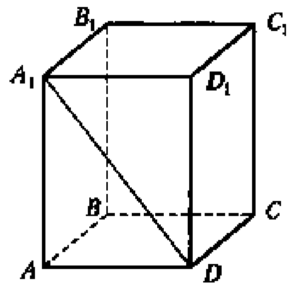
Площадь прямоугольного треугольника находится по формуле $S = \frac{ab}{2}$. Тогда $S_{осн} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ (см^2). По теореме Пифагора гипотенуза $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ (см). По условию $DB = AC = 10$ см. Так как $DB \perp (ABC)$, то $DB = h$ — высота пирамиды.

Искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 10 = 80$ (см^3).

Ответ: 80 см^3.

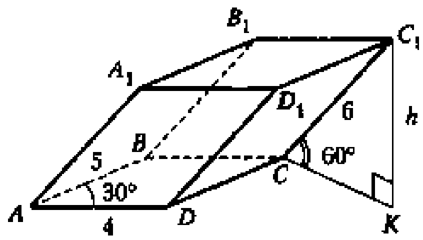
Повышенный уровень

№ 5. ***Периметр основания правильной четырехугольной призмы равен 12 см, диагональ боковой грани 5 см. Найдите объем призмы.***



Решение.
Объем любой призмы находится по формуле $V = S_{осн} \cdot h$. Правильная четырехугольная призма является прямой, ее основание — квадрат, боковое ребро перпендикулярно основанию и является высотой призмы, все боковые грани — равные прямоугольники. Пусть $ABCD$ — основание призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда $AD = 12:4 = 3$ (см), $A_1D = 5$ см. Из прямоугольного треугольника A_1AD по теореме Пифагора высота пирамиды $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h = AD^2 \cdot AA_1 = 3^2 \cdot 4 = 36$ (см^3).
Ответ: 36 см^3.

№ 6. ***Две стороны основания параллелепипеда равны 5 см и 4 см, угол между ними 30°. Боковое ребро равно 6 см и наклонено к основанию под углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.***



Решение.
Объем любой призмы находится по формуле $V = S_{осн} \cdot h$.
Пусть $ABCD$ – основание параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм. Площадь параллелограмма равна:

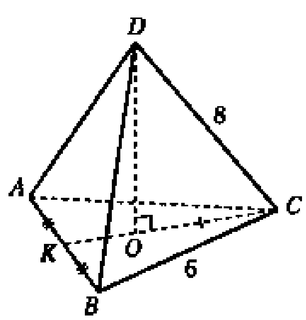
$S = ab\sin\alpha = 5 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ (см^2).

Из точки C_1 опустим перпендикуляр C_1K на плоскость $ABCD$. Тогда $h = C_1K$ — высота параллелепипеда, $\angle C_1CK = 60°$ — угол наклона бокового ребра. Из прямоугольного треугольника C_1KC находим

$C_1K = C_1C \cdot \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot h = 10 \cdot 3\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$ (см^3).
Ответ: $30\sqrt{3}$ (см^3).

№ 7. ***Найдите объем правильной треугольной пирамиды с ребром основания, равным 6 см, и боковым ребром, равным 8 см.***



Решение.
Объем любой пирамиды находится по формуле $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$. В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник, все боковые ребра равны между собой и вершина проектируется в центр основания.
Пусть ABC — основание пирамиды, $AB = BC = AC = 6$ см, $DC = 8$ см.
Площадь основания $S_{осн} = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см^2). Необходимо найти высоту h пирамиды. Проведем медиану CK, которая будет и высотой. $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см). Опустим высоту $h = DO$. Так как O — центр основания и медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, то $CO = \frac{2}{3} CK = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см). Из прямоугольного треугольника DOC по теореме Пифагора $DO = h = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{8^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см).

Объем пирамиды $V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{39}$ (см^3).

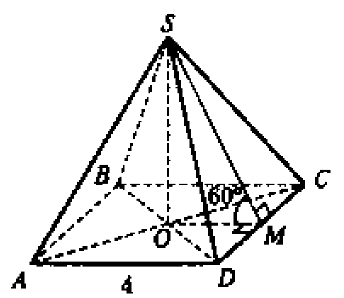
Ответ: $6\sqrt{39}$ см^3.

Очень важное замечание!

Отрезок CO можно найти другим способом. Так как точка O — центр равностороннего треугольника, то она является и центром окружности, описанной около основания. Тогда $CO = R$ — радиус описанной окружности. Поскольку для равностороннего треугольника $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $CO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

Итак: длина CO равна или $\frac{2}{3}$ медианы основания, которая в свою очередь равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, или радиусу описанной около основания окружности $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

№ 8. *Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с ребром основания, равным 4 см, и двугранным углом при ребре основания, равным 60°.*



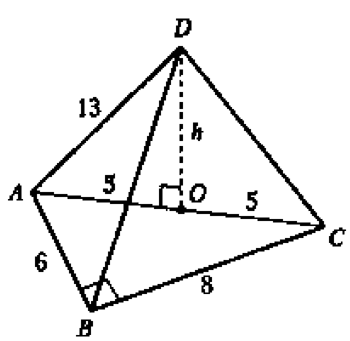
Решение.

В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат, боковые ребра равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Вершина пирамиды проектируется в центр основания.

Объем любой пирамиды находится о формуле $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$. Площадь основания $S_{ABCD} = AD^2 = 16$ см². Необходимо найти высоту $h = SO$. Проведем $OM \perp DC$. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp DC$. $\angle SMO = 60°$ — линейный угол двугранного угла при ребре основания. Так как в равнобедренном треугольнике DSC высота SM является и медианой, то M — середина DC. $OM = \frac{1}{2} DC = 2$ см как средняя линия треугольника ADC. Из прямоугольного треугольника SOM $\frac{SO}{OM} = \mathrm{tg}\, 60°$, откуда $\frac{SO}{2} = \sqrt{3}$, $SO = 2\sqrt{3}$ (см). Объем пирамиды $V_{пкр} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ (см³).

Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см³.

№ 9. *В основании тетраэдра лежит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Боковые ребра пирамиды равны по 13 см. Найдите объем пирамиды.*

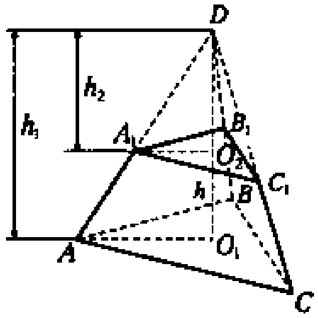


Решение.

Объем любой пирамиды находится по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$. Пусть $DABC$ — данная пирамида, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см. Так как $6^2 + 8^2 = 10^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, в основании тетраэдра лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Тогда $S_{осн} = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ (см²). Поскольку боковые ребра пирамиды равны, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Сделаем чертеж пирамиды и опустим высоту DO. Из прямоугольного треугольника AOD по теореме Пифагора найдем высоту пирамиды: $h = DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Объем пирамиды $V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96$ (см^3).

Ответ: 96 см^3.

№ 10. *Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 6 см и 4 см, высота — 3 см. Найдите объем данной усеченной пирамиды.*



Решение.

Объем усеченной пирамиды равен разности объемов данной пирамиды и отсеченной. Достроим усеченную пирамиду $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до полной пирамиды $DABC$. $DO_1 = h_1$ — высота полной пирамиды, $DO_2 = h_2$ — высота отсеченной пирамиды, $O_1O_2 = h = h_1 - h_2$ — высота усеченной пирамиды. По условию $h_1 - h_2 = 3$ см, откуда $h_1 = h_2 + 3$.

Так как полная и отсеченная пирамиды подобны, то

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Так как $h_1 = h_2 + 3$, то $\frac{h_2 + 3}{h_2} = \frac{3}{2}$, откуда $h_2 = 6$ см, $h_1 = 9$ см.

$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$ (см^3).

$V_{DA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_1C_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 6\sqrt{3}$ (см^3).

$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{DABC} - V_{DA_1B_1C_1} = 27\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$ (см^3).

Ответ: $21\sqrt{3}$ см^3.

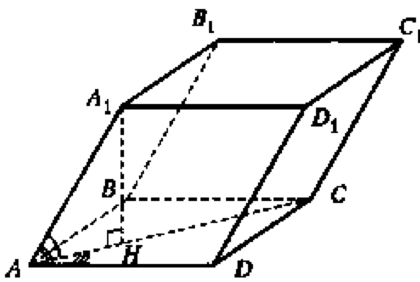
Замечание. Решив задачу в общем виде для произвольной усеченной пирамиды, приняв площади ее оснований за S_1 и S_2, а высоту за h, учитывая, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$, получим $\boxed{V_{ус\ пир} = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)}$

Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид с такой же высотой, как и усеченная пирамида, и основаниями: одно — нижнее основание усеченной пирамиды, второе — верхнее основание, а третье основание — среднее геометрическое площадей верхнего и нижнего оснований.

Выведите эту формулу самостоятельно.

ПОДГОТОВКА К ЦТ

ЦТ 1. *Все грани параллелепипеда — ромбы с периметром 36 и острым угол 60°. Найдите объем V параллелепипеда. В ответе запишите значение* $V\sqrt{2}$.



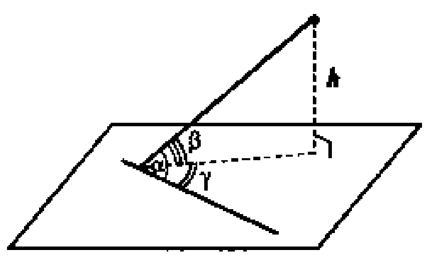
Решение.
Объем параллелепипеда находится по формуле $V = S_{осн} \cdot h$. Так как у ромба все стороны равны, то все ребра параллелепипеда равны $36:4=9$.

$$S_{осн} = S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAC = 9 \cdot 9 \cdot \sin 60° = 81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Опустим высоту параллелепипеда $h = A_1H$. Так как $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$, то точка H принадлежит биссектрисе угла BAD, которая содержит диагональ AC ромба $ABCD$. Отсюда $\angle CAD = 30°$. По теореме о трех косинусах (см.: Казаков В. «Наглядная геометрия. 10 класс». Тема «Двугранный угол», параграф «Для тех, кому нравится математика», зад. 1) $\cos\angle A_1AD = \cos\angle A_1AC \cdot \cos\angle CAD$, т. е. $\cos 60° = \cos\angle A_1AC \cdot \cos 30°$, $\frac{1}{2} = \cos\angle A_1AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\angle A_1AC = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из прямоугольного треугольника A_1AH высота $A_1H = A_1A \cdot \sin\angle A_1AH$.

Так как $\sin\angle A_1AH = \sqrt{1-\cos^2\angle A_1AH} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, то высота призмы $h = A_1H = 9\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$. Объем параллелепипеда $V = S_{осн}h = \frac{81\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{729\sqrt{2}}{2}$, $V\sqrt{2} = \frac{729\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 729$.

Ответ: 729.

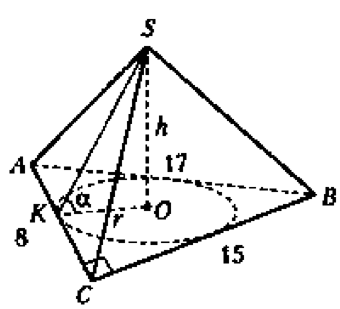


Запомните!

Теорема о трех косинусах (для наклонной, ее проекции и прямой на плоскости):

$$\boxed{\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma}$$

ЦТ 2. *Стороны основания треугольной пирамиды равны 8, 15 и 17. Все боковые грани наклонены к основанию под углом* $\alpha = \mathrm{arctg}\,2$. *Найдите объем пирамиды.*



Решение.
Пусть $AC=8$, $BC=15$, $AB=17$, SO — высота пирамиды. Так как боковые грани равно наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр O вписанной в основание окружности. Поскольку 8, 15, 17 — Пифагорова тройка (см.: Казаков В. «Наглядная геометрия. 8 класс». С. 45), т. е. $8^2+15^2=17^2$, то ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$. Для нахождения радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, воспользуемся формулой $r = \frac{a+b-c}{2}$. Получим $OK = r = \frac{8+15-17}{2} = 3$. По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AC$, тогда $\angle SKO = \alpha$ — угол наклона боковой грани. Так как $\alpha = \mathrm{arctg}\,2$, то $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. Из прямоугольного треугольника SOK $h = SO = OK\,\mathrm{tg}\,\alpha = 3\cdot 2 = 6$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{AC\cdot BC}{2}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{8\cdot 15}{2}\cdot 6 = 40$.

Ответ: 40.

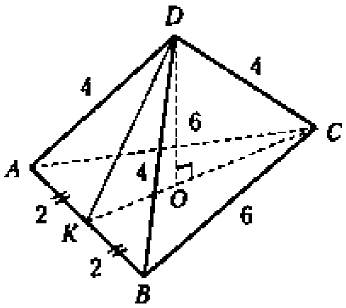
Запомните!

Популярные Пифагоровы тройки: (3; 4; 5), (5; 12; 13), (7; 24; 25), (8; 15; 17), (20; 21; 29).

При умножении на $k > 0$ каждого числа тройки получим новую Пифагорову тройку.

Например, из тройки (3; 4; 5) получаем (6; 8; 10), (9; 12; 15), (12; 16; 20) и т. д.

ЦТ 3. *Дана треугольная пирамида DABC, у которой $AB = AD = BD = DC = 4$, $AC = BC = 6$. Найдите объем V пирамиды. В ответе запишите $3V\sqrt{47}$.*



Решение. Пусть DO — высота пирамиды. Так как $AD = BD$ и равным наклонным, проведенным из одной точки, соответствуют равные проекции, то $AO = BO$. Значит, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. В равнобедренном треугольнике ACB медиана CK является и высотой. Поэтому прямая CK — серединный перпендикуляр к AB и $O \in CK$. Из прямоугольного $\triangle CKB$ $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$.

Так как $AD = BD = CD$, то O — центр описанной окружности $\triangle ABC$, $OC = R$ — радиус. По формуле $R = \frac{abc}{4S}$ находим

$$OC = R = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{4 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot CK} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{32}} = \frac{18}{\sqrt{32}}.$$

Из прямоугольного треугольника DOC

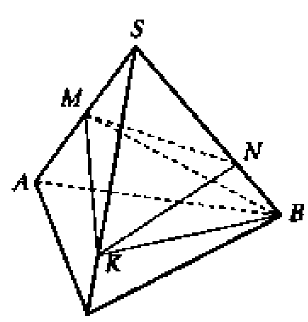
$$h = DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{18}{\sqrt{32}}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{324}{32}} = \sqrt{16 - \frac{81}{8}} = \sqrt{\frac{47}{8}}.$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot CK \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{32} \cdot \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{47}}{3}.$$

$3V\sqrt{47} = 4 \cdot 47 = 188$.

Ответ: 188.

ЦТ 4. *Дана треугольная пирамида SABC с объемом 124 см^3. На ребрах AS, BS и CS взяты точки M, N и K так, что $AM = MS$, $SN : NB = 2 : 1$, $SK : KC = 3 : 1$. Найдите объем пирамиды SMNK.*



Решение. Рассмотрим две пирамиды с общей вершиной B: данную пирамиду $BASC$, приняв за основание $\triangle ASC$, и пирамиду $BMSK$ с основанием MSK. У них общая высота h_1, опущенная из вершины B на плоскость ASC. Поэтому их объемы относятся как основания ASC и MSK.

$$\frac{S_{MSK}}{S_{ASC}} = \frac{\frac{1}{2} SM \cdot SK \cdot \sin\angle MSK}{\frac{1}{2} SA \cdot SC \cdot \sin\angle MSK} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

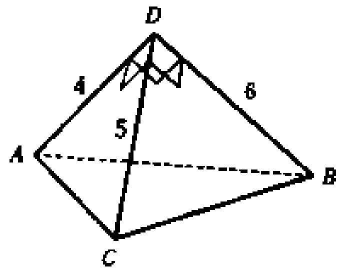
$\frac{V_{BMSK}}{V_{BASC}} = \frac{\frac{1}{3} S_{MSK} \cdot h_1}{\frac{1}{3} S_{ASC} \cdot h_1} = \frac{3}{8}$, $V_{BMSK} = \frac{3}{8} \cdot V_{BASC}$. Аналогично рассмотрим пирамиды с общей вершиной M: $MKSN$ и $MKSB$ (это пирамида $BMSK$). У них общая высота, опущенная из вершины M на плоскость BSC. Найдем отношение площадей оснований пирамид.

$$\frac{S_{KSN}}{S_{KSB}} = \frac{\frac{1}{2} SK \cdot SN \cdot \sin\angle KSN}{\frac{1}{2} SK \cdot SB \cdot \sin\angle KSN} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{V_{MKSN}}{V_{MKSB}} = \frac{\frac{1}{3} S_{KSN} \cdot h_2}{\frac{1}{3} S_{KSB} \cdot h_2} = \frac{S_{KSN}}{S_{KSB}} = \frac{2}{3},\ V_{MKSN} = \frac{2}{3} V_{MKSB},\ V_{SMNK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} V_{SABC} = \frac{1}{4} \cdot 124 = 31 \text{ (см}^3).$$

Ответ: 31 см^3.

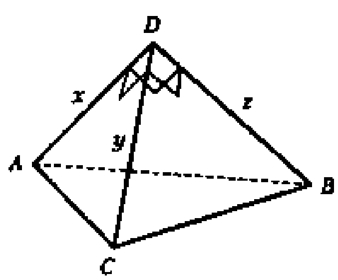
ЦТ 5. *Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны 4 см, 5 см и 6 см. Найдите объем пирамиды.*



Решение. В треугольной пирамиде любую грань можно рассматривать как основание! Рассмотрим данную пирамиду относительно основания ADC. Так как $BD \perp AD$ и $BD \perp CD$, то $BD \perp$ плоскости ADC по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда ребро BD — высота пирамиды относительно основания ADC. Поэтому объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot BD = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD \cdot DC}{2} \cdot BD = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 20$ (см³).

Ответ: 20 см³.

ЦТ 6. *Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые. Площади боковых граней равны $S_1 = 4$, $S_2 = 8$, $S_3 = 9$. Найдите объем пирамиды.*

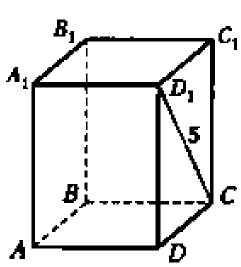


Решение. Рассмотрим данную пирамиду относительно основания ADC. Тогда $V_{BACD} = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot BD$ (см. задачу 5). Пусть $DA = x$, $DC = y$, $DB = z$. По условию $\frac{xy}{2} = S_1$, $\frac{xz}{2} = S_2$, $\frac{yz}{2} = S_3$. Значит, $\frac{y}{z} = \frac{S_1}{S_2}$, $y = z\frac{S_1}{S_2}$, $\frac{z\frac{S_1}{S_2} \cdot z}{2} = S_3$,

$$z = \sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}},\ V = \frac{1}{3}S_1 \cdot z = \frac{1}{3}S_1 \cdot \sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}} = \frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3} = \frac{\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9}}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

ЦТ 7. *Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна 48 см². Диагональ боковой грани равна 5 см. Найдите наибольший возможный объем призмы, задаваемой этими условиями.*



Решение. Правильная четырехугольная призма является прямой, ее основание — квадрат, боковое ребро перпендикулярно основанию и является высотой призмы, боковые грани — равные прямоугольники. Обозначим $AD = DC = x$ см. По теореме Пифагора

$$DD_1 = \sqrt{D_1C^2 - DC^2} = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2} \text{ (см)}.$$

$$S_{DD_1C_1C} = DC \cdot DD_1 = x\sqrt{25 - x^2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Из условия $S_{DD_1C_1C} = 48 : 4 = 12$.

Тогда $x\sqrt{25 - x^2} = 12$, $x^2(25 - x^2) = 144$, $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Сделаем замену переменной $y = x^2$. Получим $y^2 - 25y + 144 = 0$, откуда $y_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$, $y_1 = 9$, $y_2 = 16$. Тогда $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Если $x = 4$, то $DD_1 = \sqrt{25 - 16} = 3$ (см) и объем призмы $V = S_{осн} \cdot h = AD^2 \cdot DD_1 = 4^2 \cdot 3 = 48$ (см³).

Если $x = 3$, то $DD_1 = \sqrt{25 - 9} = 4$ (см) и объем призмы $V = S_{осн} \cdot h = AD^2 \cdot DD_1 = 3^2 \cdot 4 = 36$ (см³).

Наибольший возможный объем равен 48 см³.

Ответ: 48 см³.

Ответы на простые и непростые вопросы

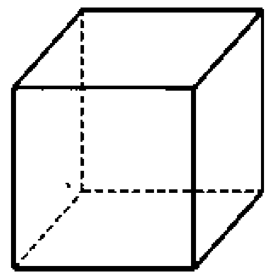
1. 4 см.
2. На 1000.
3. На 60.
4. 120 см^2.
5. 20 см^2.
6. 60 см^3.
7. $\frac{G}{Q}$.
8. $\frac{P^2k}{16}$.
9. В 8 раз.
10. Уменьшился в 2 раза.
11. 100 см^3.
12. 9 см^3.
13. 40 см^3.
14. 35 см^3.
15. 26. Решение: $3\cdot3\cdot3=27$, $27-1=26$ — вместо центрального кубика — механизм крепления.
16. 8 см^3.
17. $2G-T$.
18. 60 см^3.
19. Куба. Диагональ куба $d=a\sqrt{3}$, поэтому ребро данного куба $a=\frac{d}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, его объем $V_к=a^3=\left(\sqrt{3}\right)^3=3\sqrt{3}$. Объем параллелепипеда $V_п=abc=1\cdot2\cdot3=6$; $3\sqrt{3}<6$.
20. На 87,5 %. Ребро данного куба 2 ед., уменьшенного — 1 ед., объем данного куба — 8 ед^3, уменьшенного — 1 ед^3. Объем данного куба 100 %, уменьшенного — $\frac{100\ \%}{8}=12{,}5\ \%$; $100\ \%-12{,}5\ \%=87{,}5\ \%$.
21. $\frac{1}{6}$ часть. Объем пирамиды C_1ABCD составляет $\frac{1}{3}$ часть от объема куба, а объем пирамиды C_1ABC равен половине объема пирамиды C_1ABCD.
22. $\frac{1}{3}$.
23. Отношению их оснований.
24. Октаэдр (см. тему «Правильные многогранники»).
25. 3 см^3. Воспользуемся формулой объема правильного тетраэдра $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{3^3\sqrt{2}}{12}=\frac{27\sqrt{2}}{12}=\frac{9\sqrt{2}}{4}\approx\frac{9\cdot1{,}4}{4}\approx3$ (см^3).

Запомните!

1. ***Объем произвольной призмы*** равен произведению площади основания на высоту: $\boxed{V_{пр}=S_{осн}h}$
2. ***Объем пирамиды*** равен одной третьей произведения площади основания на высоту: $\boxed{V_{пир}=\frac{1}{3}S_{осн}h}$
3. ***Объем усеченной пирамиды*** равен сумме объемов трех пирамид с той же высотой и основаниями, одно из которых равно большему основанию усеченной пирамиды, второе — меньшему основанию, третье — среднему арифметическому двух первых оснований: $\boxed{V_{ус\ пир}=\frac{1}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)h}$

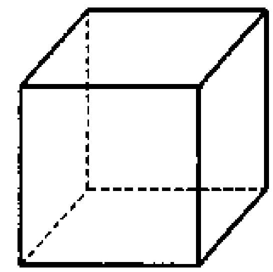
Задачи по теме «Объемы многогранников»

1 Площадь одной грани куба равна 25. Найдите объем куба.



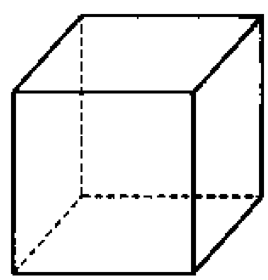
Ответ:

2 Периметр грани куба равен 12 см. Найдите объем куба.



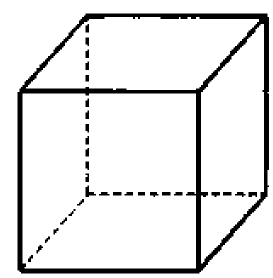
Ответ:

3 Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Найдите объем куба.



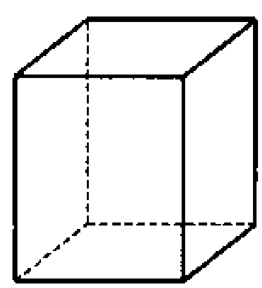
Ответ:

4 Объем куба равен 125 см^3. Найдите площадь поверхности куба.



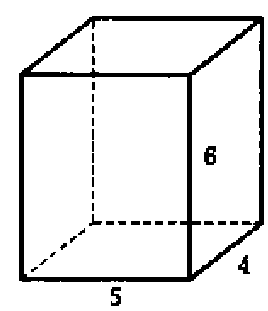
Ответ:

5 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3, 4 и 5.



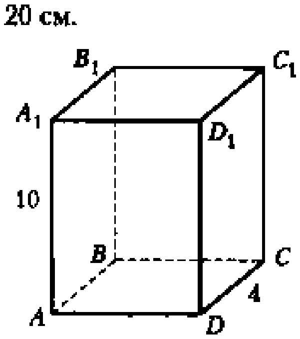
Ответ:

6 По данным на рисунке найдите объем прямоугольного параллелепипеда.



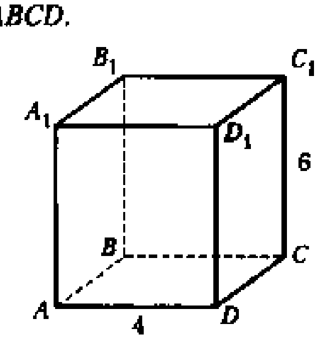
Ответ:

7 По данным на рисунке найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если периметр основания $ABCD$ равен 20 см.



Ответ:

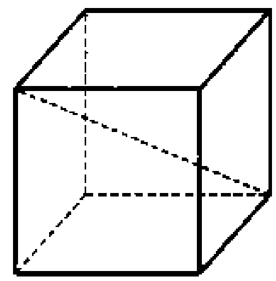
8 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 72 см^3. По данным на рисунке найдите периметр основания $ABCD$.



Ответ:

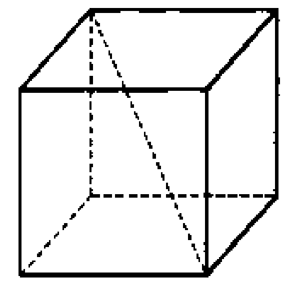
Объем куба и параллелепипеда

9 Найдите диагональ куба с объемом 1 $см^3$.



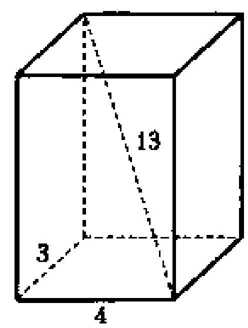
Ответ:

10 Найдите объем куба с диагональю $2\sqrt{3}$ см.



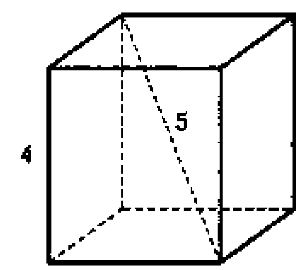
Ответ:

11 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с диагональю 13 и сторонами основания 4 и 3.



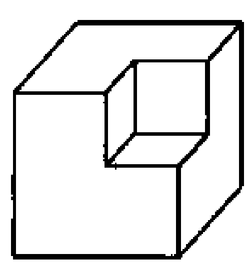
Ответ:

12 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с высотой 4 и диагональю 5, в основании которого лежит квадрат.



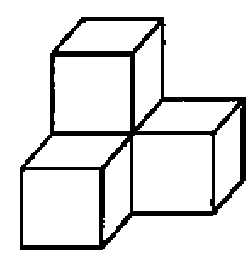
Ответ:

13 В кубе сделали вырез в форме куба, ребро которого в 2 раза меньше ребра данного куба. Объем полученной фигуры 56 $см^3$. Чему равна площадь поверхности этой фигуры?



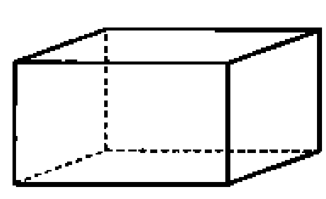
Ответ:

14 Из четырех кубиков сложили горку, площадь поверхности полученной фигуры равна 18 $см^2$. Чему равен объем этой фигуры?



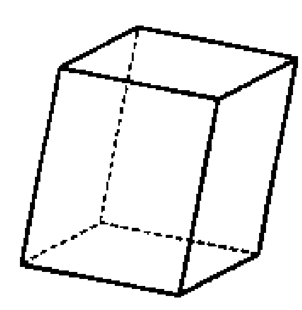
Ответ:

15 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 9 и 12, диагональ большей боковой грани — 13. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

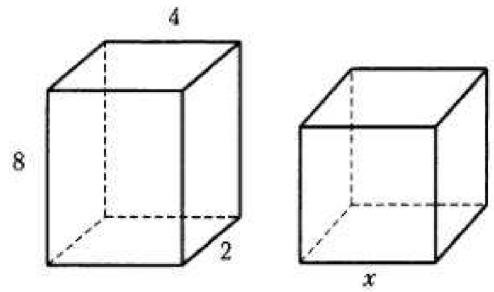
16 В основании прямой призмы с боковым ребром, равным 10, лежит прямоугольник со стороной 5 и диагональю 13. Найдите объем призмы.



Ответ:

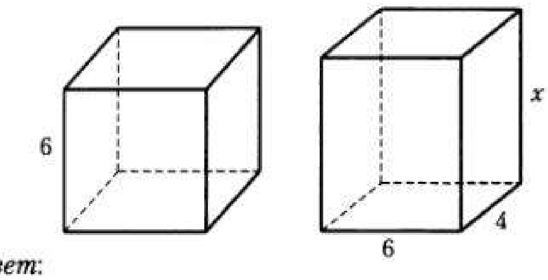
Объем куба и параллелепипеда

17 Объем куба равен объему прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2, 4 и 8. Найдите длину ребра куба.



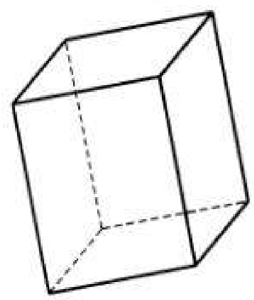
Ответ:

18 Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами основания 6 и 4 равен объему куба с ребром 6. Найдите высоту параллелепипеда.



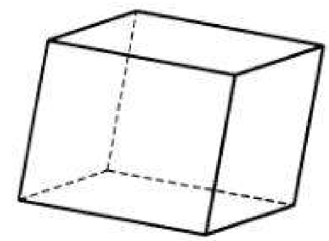
Ответ:

19 В основании прямоугольного параллелепипеда с объемом 216 лежит квадрат с периметром 24. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.



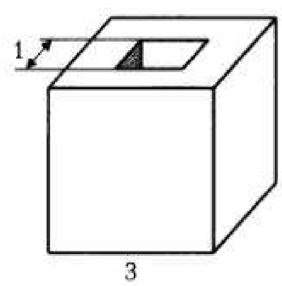
Ответ:

20 В основании прямоугольного параллелепипеда с площадью боковой поверхности 120 лежит квадрат с площадью 36. Найдите объем параллелепипеда.



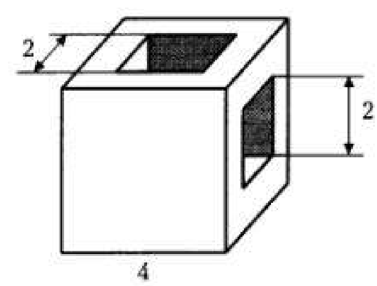
Ответ:

21 В кубе с ребром 3 см проделано сквозное отверстие квадратного сечения со стороной 1 см. Найдите объем полученной фигуры.



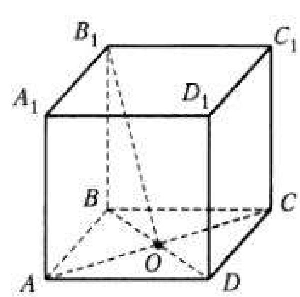
Ответ:

22 В кубе с ребром 4 см проделаны два сквозных отверстия квадратного сечения со стороной 2 см. Найдите объем полученной фигуры.



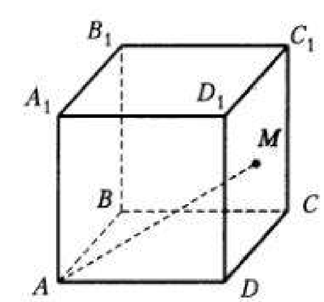
Ответ:

23* Объем куба равен 64. Найдите B_1O.



Ответ:

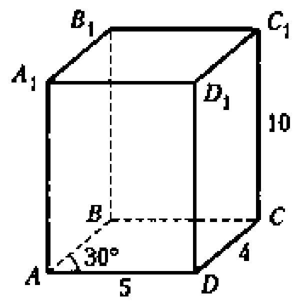
24* Точка M — центр грани куба, $AM = \sqrt{6}$. Найдите объем куба.



Ответ:

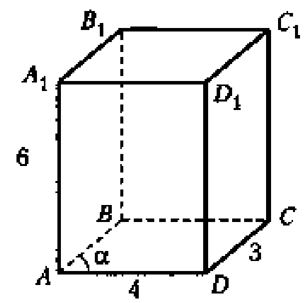
Объем куба и параллелепипеда

25 Найдите объем прямого параллелепипеда, у которого $CC_1 = 10$, $AD = 5$, $DC = 4$, $\angle BAD = 30°$.



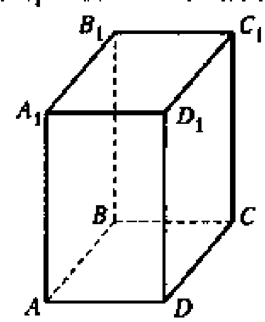
Ответ:

26 Объем прямого параллелепипеда равен $36\sqrt{2}$, $AA_1 = 6$, $AD = 4$, $DC = 3$. Найдите угол α.



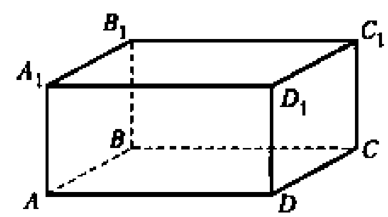
Ответ:

27 Объем прямоугольного параллелепипеда равен 144 см^3, площадь боковой поверхности — 144 см^2, площадь полной поверхности — 180 см^2. Найдите высоту параллелепипеда.



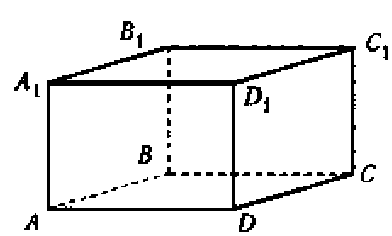
Ответ:

28 Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда — 90 см^2, площадь полной поверхности — 190 см^2, высота — 3 см. Найдите объем параллелепипеда.



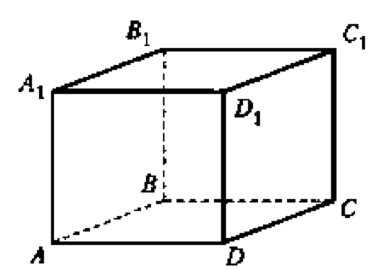
Ответ:

29 Высота прямого параллелепипеда равна 2, основание — ромб. Диагонали параллелепипеда равны $\sqrt{29}$ и $\sqrt{68}$. Найдите объем параллелепипеда.



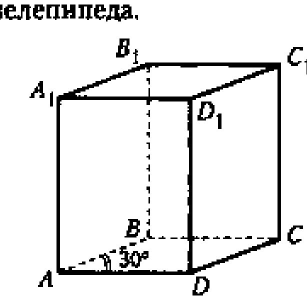
Ответ:

30 Основанием прямой призмы является ромб с диагоналями 4 и 6. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 5. Найдите его объем.



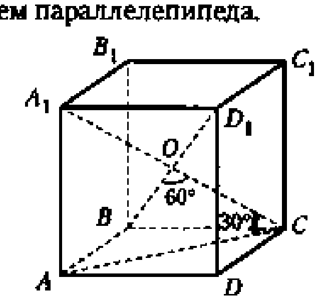
Ответ:

31* Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм с углом 30° и площадью 4. Площади двух боковых граней равны 8 и 16. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

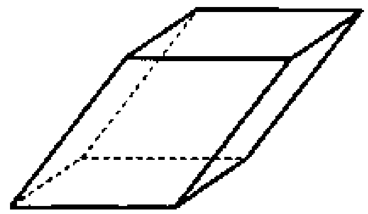
32* Дан прямой параллелепипед, угол BOC равен 60°, диагонали AC и BD равны, диагональ $A_1C = 8\sqrt{2}$ и образует с основанием $ABCD$ угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

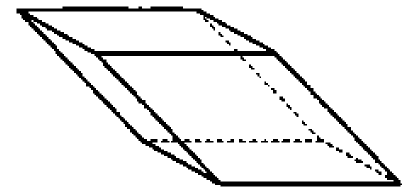
Объем наклонного параллелепипеда

33 В основании параллелепипеда с высотой, равной 6, лежит квадрат со стороной 4. Найдите объем параллелепипеда.



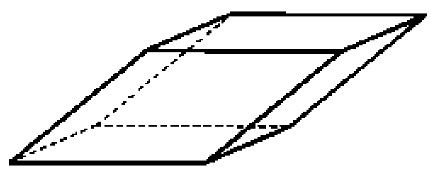
Ответ:

34 В основании параллелепипеда с объемом 100 лежит квадрат с периметром 20. Найдите высоту параллелепипеда.



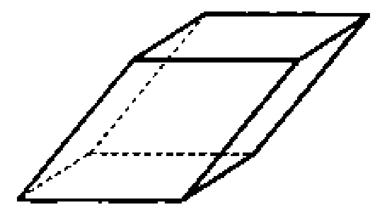
Ответ:

35 Площадь основания наклонного параллелепипеда равна 12, боковое ребро равно $\sqrt{8}$ и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем параллелепипеда.



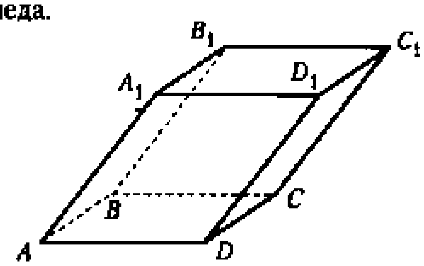
Ответ:

36 Боковое ребро параллелепипеда равно $\sqrt{12}$ и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Объем параллелепипеда 45. Найдите площадь основания.



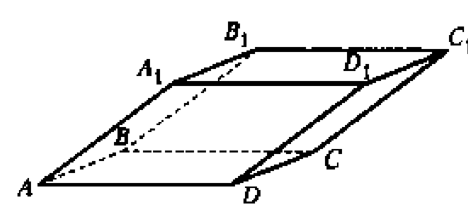
Ответ:

37 Основание $ABCD$ наклонного параллелепипеда — прямоугольник, $AD = 4$ см, $AB = 3$ см. Боковая грань AA_1D_1D перпендикулярна основанию и имеет площадь 20 см^2. Найдите объем параллелепипеда.



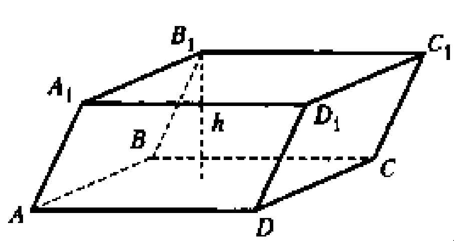
Ответ:

38 Основание $ABCD$ и боковая грань AA_1B_1B наклонного параллелепипеда — равные прямоугольники, $AD = 6$ см, $AB = 4$ см. Угол A_1AD равен 30°. Найдите объем параллелепипеда.



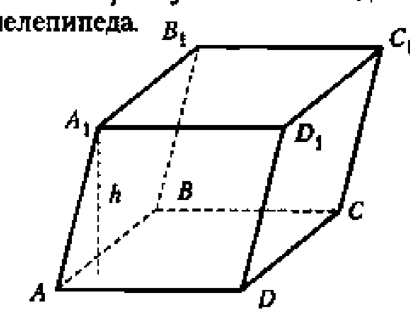
Ответ:

39 Высота наклонного параллелепипеда равна 4, основанием является параллелограмм со сторонами 5 и 6 и острым углом 30°. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

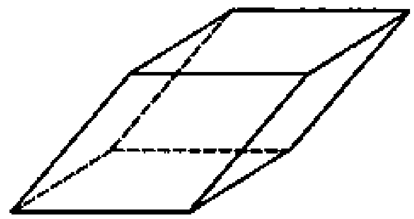
40 Объем наклонного параллелепипеда равен 60, основанием является параллелограмм со сторонами $\sqrt{8}$ и 5 и острым углом 45°. Найдите высоту параллелепипеда.



Ответ:

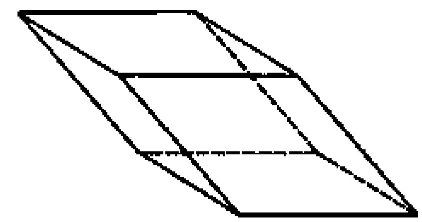
Объем наклонного параллелепипеда

41 В основании наклонного параллелепипеда лежит параллелограмм с площадью 24. Высота параллелепипеда равна 5. Объем параллелепипеда равен:
1) 100;
2) 120;
3) 60;
4) 29.



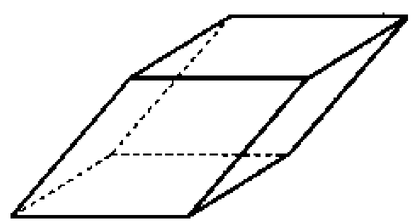
Ответ:

42 Объем наклонного параллелепипеда равен 100, площадь основания равна 25. Высота параллелепипеда равна:
1) 4;
2) 5;
3) 2500;
4) 8.



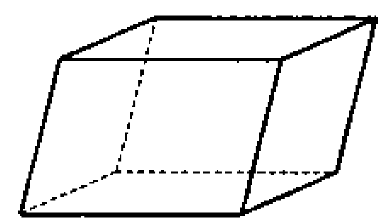
Ответ:

43 В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 5 и 7. Расстояние от вершины верхнего основания до плоскости нижнего равно 6. Найдите объем параллелепипеда.



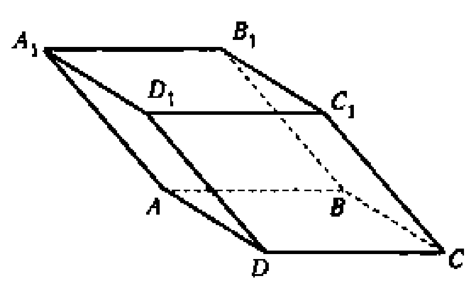
Ответ:

44 В основании наклонного параллелепипеда лежит ромб с периметром 12 и высотой 2. Высота параллелепипеда равна стороне ромба. Найдите объем параллелепипеда.



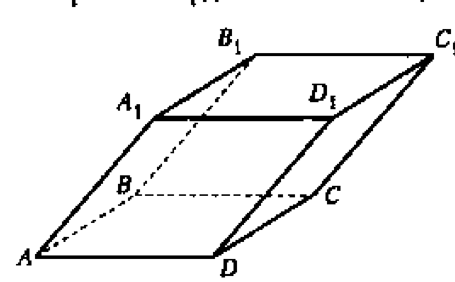
Ответ:

45 Объем параллелепипеда равен 90, расстояние от вершины A_1 до плоскости DD_1CC_1 равно 5. Найдите площадь грани AA_1B_1B.



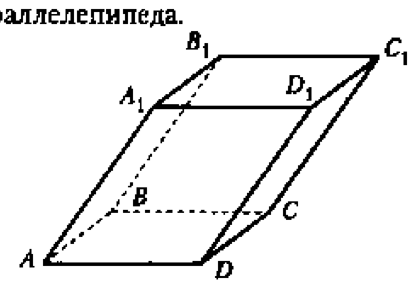
Ответ:

46 В параллелепипеде площадь грани AA_1B_1B равна 20, грани $ABCD$ – 24. Расстояние от точки D до плоскости AA_1B_1B равно 6. Найдите расстояние от вершины D_1 до плоскости $ABCD$.



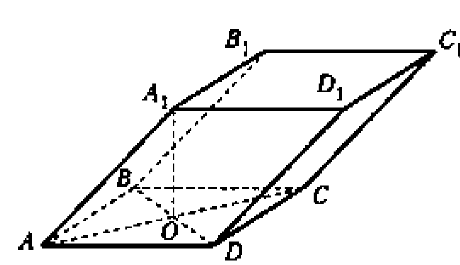
Ответ:

47* В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 4 и 6, боковое ребро равно $\sqrt{21}$. Грани AA_1B_1B и AA_1D_1D составляют с основанием углы 45° и 60°. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

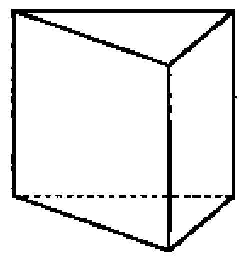
48* Все ребра наклонного параллелепипеда равны $2\sqrt{2}$, $\angle BAC = 60°$, $A_1O \perp ABCD$. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

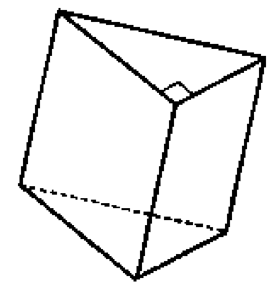
Объем прямой призмы

49 В основании прямой призмы с высотой 6 лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 2. Найдите объем призмы.



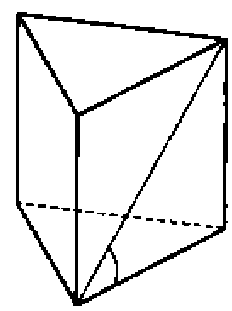
Ответ:

50 В основании прямой призмы с объемом 192 лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 6. Найдите высоту призмы.



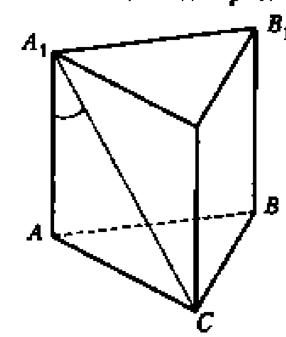
Ответ:

51 Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8, угол наклона диагонали боковой грани к основанию — 60°. Найдите объем призмы.



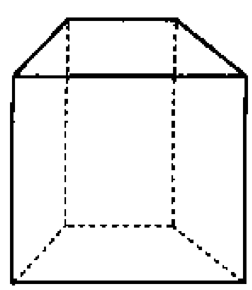
Ответ:

52 Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6, объем призмы — 162. Найдите угол между диагональю боковой грани и боковым ребром.



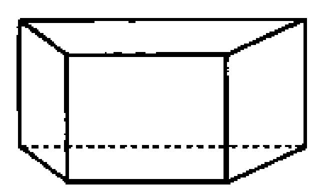
Ответ:

53 В основании прямой призмы лежит трапеция с основаниями 6 и 8 и высотой 4. Большая боковая грань призмы – квадрат. Найдите объем призмы.



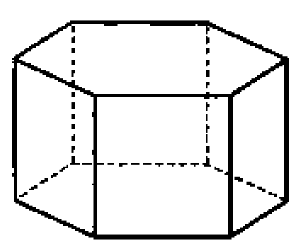
Ответ:

54 В основании прямой призмы лежит трапеция со средней линией, равной 10, и высотой, равной 6. Объем призмы равен 240. Найдите высоту призмы.



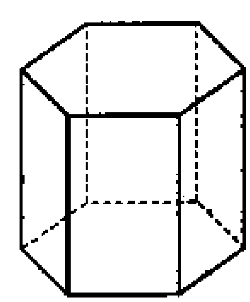
Ответ:

55* Большая диагональ правильной шестиугольной призмы равна $\sqrt{20}$, все боковые грани — квадраты. Объем призмы $V = 12\sqrt{x}$. Найдите x.



Ответ:

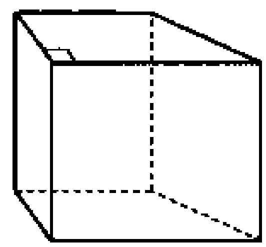
56* Меньшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 12 и наклонена к основанию под углом 60°. Найдите объем призмы.



Ответ:

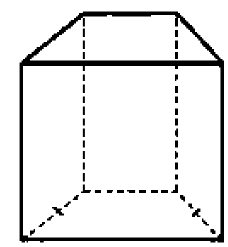
Объем призмы

57 В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция с основаниями 6 и 10 и бо́льшей боковой стороной 5. Боковое ребро призмы равно 10. Найдите объем призмы.



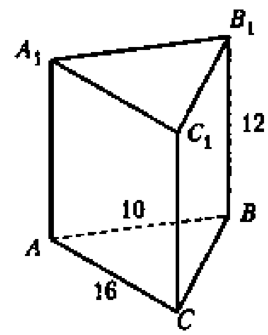
Ответ:

58 В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 10 и боковой стороной 5. Бо́льшая боковая грань призмы — квадрат. Найдите объем призмы.



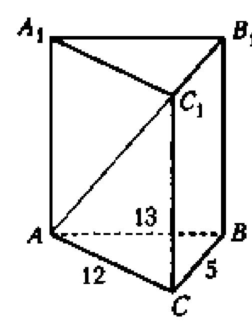
Ответ:

59 Дано: $A...C_1$ — прямая призма, $AB = BC = 10$, $AC = 16$, $BB_1 = 12$, $A_1B \perp AB_1$. Найдите объем призмы.



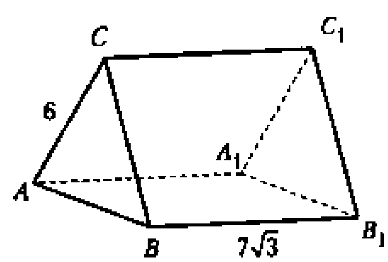
Ответ:

60 Дано: $A...C_1$ — прямая призма, AC_1 — биссектриса угла A_1AC_1, $AB = 13$, $AC = 12$, $BC = 5$. Найдите объем призмы.



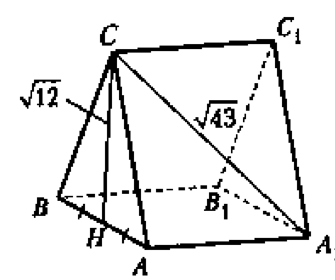
Ответ:

61 Дано: $A...C_1$ — правильная призма, $AC = 6$, $BB_1 = 7\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.



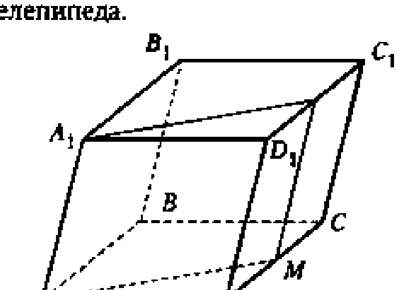
Ответ:

62 Дано: $A...C_1$ — правильная призма, $AH = HB$, $CH = \sqrt{12}$, $A_1C = \sqrt{43}$. Найдите объем призмы.



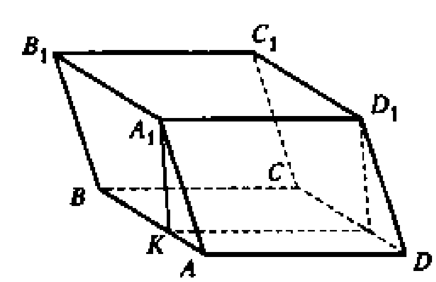
Ответ:

63 Точка M — середина ребра DC параллелепипеда. Плоскость A_1AM делит параллелепипед на две части. Объем меньшей части равен 24. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

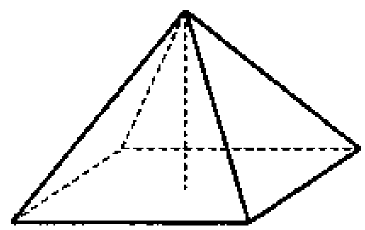
64 $AK : KB = 1 : 2$. Плоскость KA_1D_1 делит параллелепипед на две части. Объем большей части равен 30. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

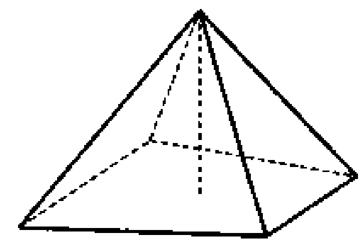
Объем пирамиды

65 В основании пирамиды лежит квадрат со стороной 6, высота пирамиды равна 5. Найдите объем пирамиды.



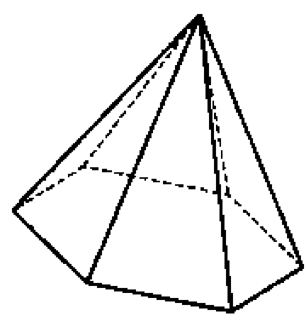
Ответ:

66 Площадь основания четырехугольной пирамиды равна 15, объем пирамиды равен 20. Найдите высоту пирамиды.



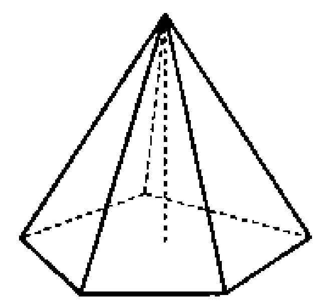
Ответ:

67 Площадь основания пирамиды равна 24, расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания равно 6. Найдите объем пирамиды.



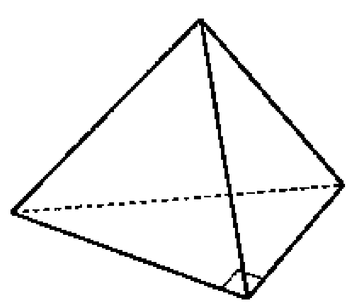
Ответ:

68 Объем пирамиды равен 120, расстояние от вершины пирамиды до плоскости ее основания равно 20. Найдите площадь основания пирамиды.



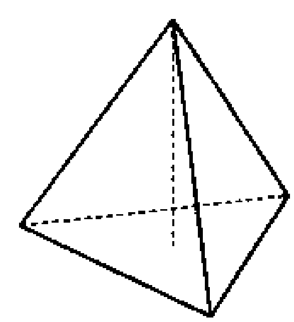
Ответ:

69 Катеты основания равны 6 и 8, высота пирамиды равна гипотенузе основания. Найдите объем пирамиды.



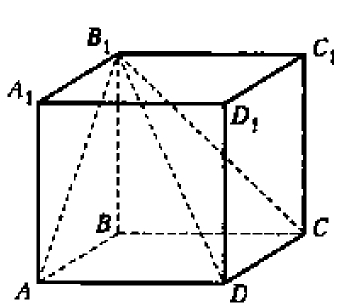
Ответ:

70 Стороны основания равны 3, 4 и 5, высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



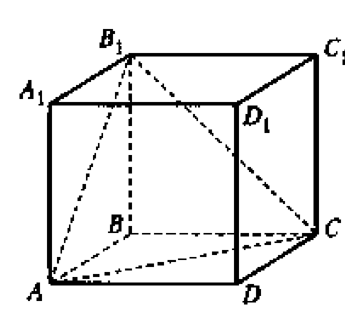
Ответ:

71 Ребро куба равно 9. Найдите объем пирамиды B_1ABCD.



Ответ:

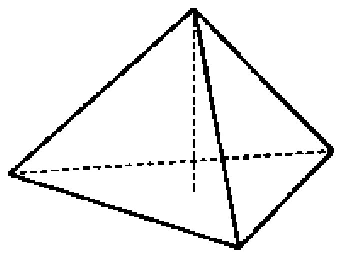
72 Объем куба равен 90. Найдите объем пирамиды B_1ABC.



Ответ:

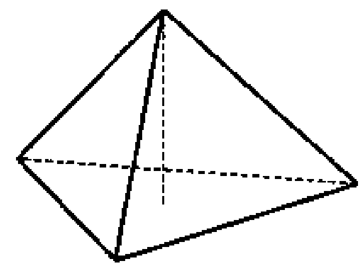
Объем пирамиды

73 В правильной треугольной пирамиде периметр основания равен 12 см, высота пирамиды — $4\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.



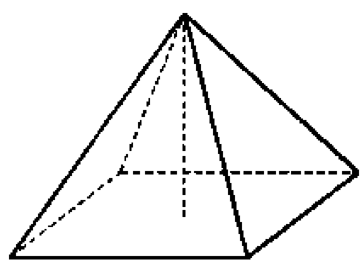
Ответ:

74 Объем правильной треугольной пирамиды равен 27, высота — $\sqrt{27}$. Найдите сторону основания пирамиды.



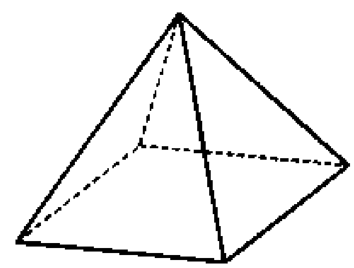
Ответ:

75 В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 3, а боковое ребро — 5. Найдите объем пирамиды.



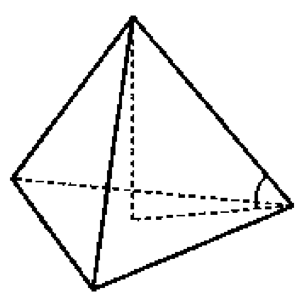
Ответ:

76 В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна 10, а боковое ребро — 13. Найдите объем пирамиды.



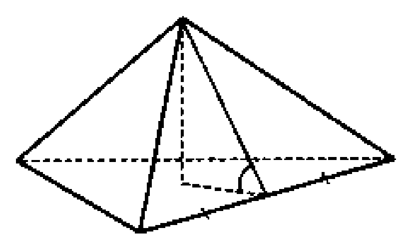
Ответ:

77 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к основанию под углом 45°, ребро основания равно 6. Найдите объем пирамиды.



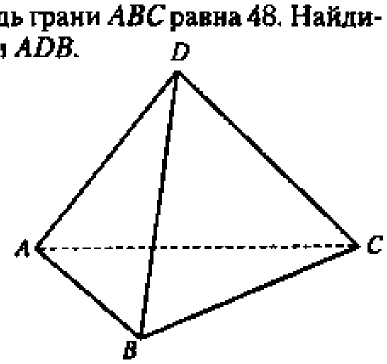
Ответ:

78 В правильной треугольной пирамиде боковая грань наклонена к основанию под углом 60°, ребро основания равно $6\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.



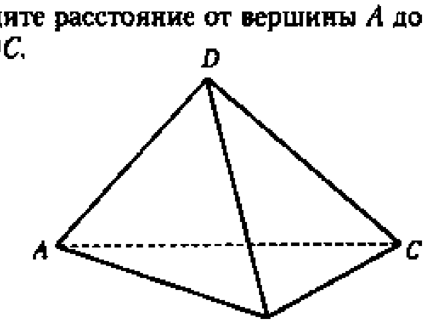
Ответ:

79 Расстояние от вершины D до плоскости ABC равно 4, а от вершины C до плоскости ADB – 6. Площадь грани ABC равна 48. Найдите площадь грани ADB.



Ответ:

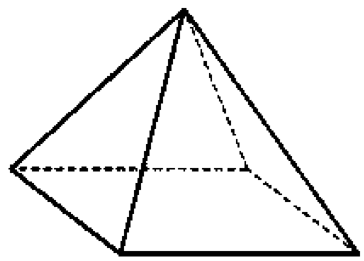
80 Площадь грани ABC равна 60, грани BDC – 40. Расстояние от вершины D до плоскости ABC равно 8. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.



Ответ:

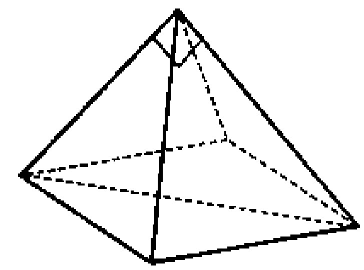
Объем пирамиды

81 В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны $\sqrt{18}$. Найдите объем пирамиды.



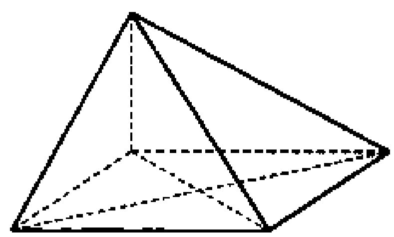
Ответ:

82 В правильной четырехугольной пирамиде диагональное сечение — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 6. Найдите объем пирамиды.



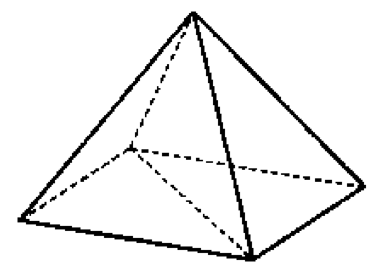
Ответ:

83 Одно из боковых ребер четырехугольной пирамиды перпендикулярно основанию и равно 4, основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите объем пирамиды.



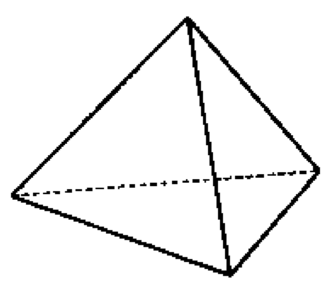
Ответ:

84 В основании четырехугольной пирамиды с высотой 6 лежит прямоугольник с диагональю 13 и стороной 12. Найдите объем пирамиды.



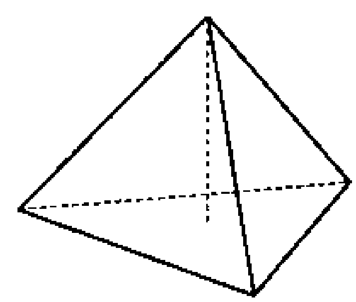
Ответ:

85 Сторона правильного тетраэдра равна $3\sqrt{2}$. Найдите его объем.



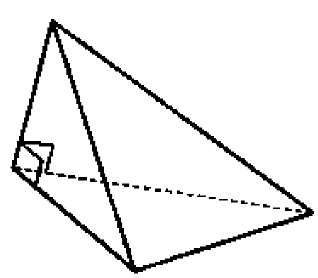
Ответ:

86 Высота правильного тетраэдра равна $4\sqrt{3}$. Найдите его объем.



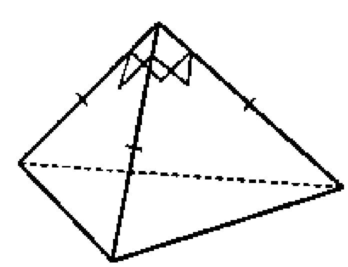
Ответ:

87* Две боковых грани тетраэдра — прямоугольные треугольники с общим катетом, равным 6 см. В основании пирамиды — треугольник со сторонами 10 см, 24 см и 26 см. Найдите объем тетраэдра.



Ответ:

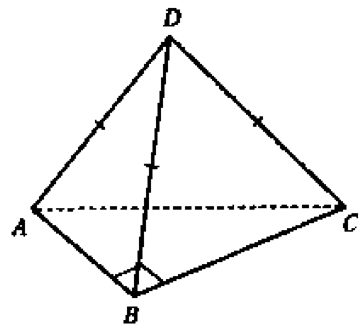
88* Боковые ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны и равны по 6 см. Найдите объем тетраэдра.



Ответ:

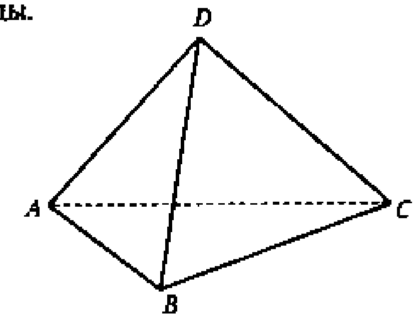
Объем пирамиды

(89) Все боковые ребра пирамиды равны по 26 см, в основании лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см. Найдите объем пирамиды.



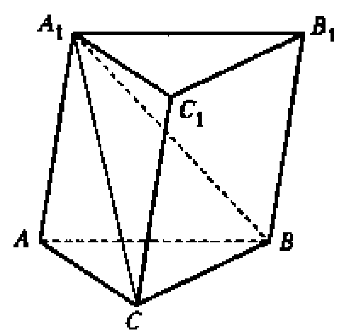
Ответ:

(90) Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45°, в основании лежит треугольник со сторонами 9, 12, 15. Найдите объем пирамиды.



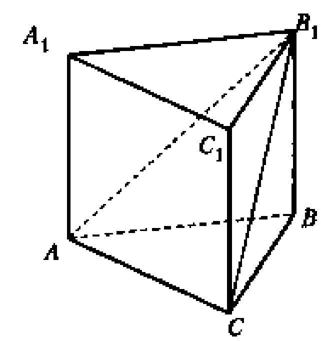
Ответ:

(91) Объем треугольной призмы равен 48. Найдите объем пирамиды A_1ABC.



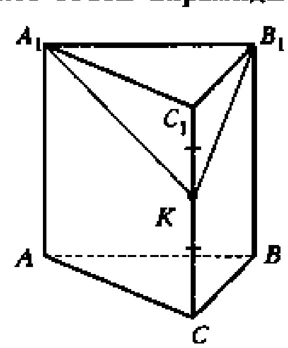
Ответ:

(92) Объем треугольной призмы равен 90. Найдите объем пирамиды с вершиной B_1 и основанием AA_1C_1C.



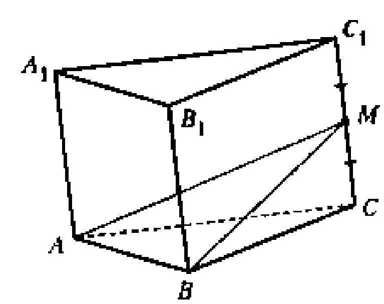
Ответ:

(93) K – середина бокового ребра прямой призмы объемом 96. Найдите объем пирамиды $KA_1B_1C_1$.



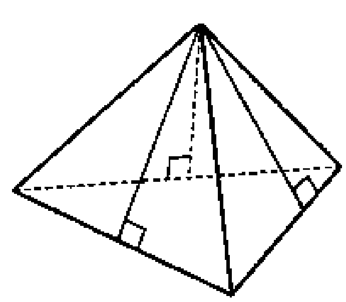
Ответ:

(94) M – середина бокового ребра прямой призмы объемом 72. Найдите объем большей из частей, на которые делится призма плоскостью AMB.



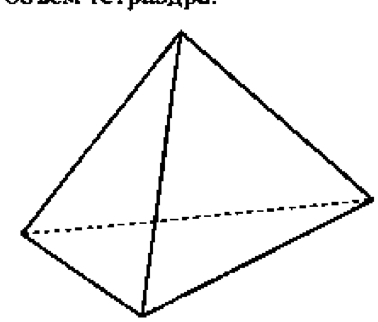
Ответ:

(95*) Высоты боковых граней пирамиды, проведенные из вершины, равны по 5, стороны основания равны 13, 14, 15. Найдите объем пирамиды.



Ответ:

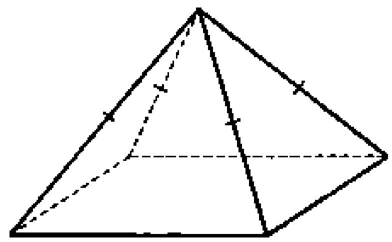
(96*) Двугранные углы при ребрах основания тетраэдра равны по 45°, стороны основания равны 7, 15, 20. Найдите объем тетраэдра.



Ответ:

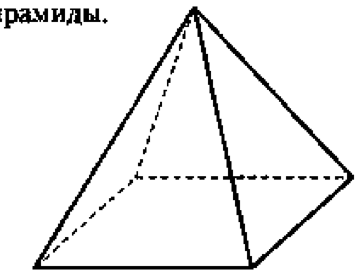
Объем пирамиды

97 В основании пирамиды с высотой 4 лежит параллелограмм со сторонами 5 и 6. Найдите объем пирамиды, если ее боковые ребра равны.



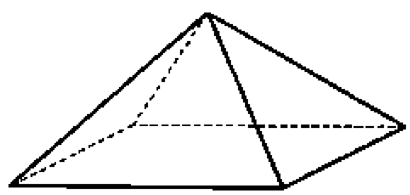
Ответ:

98 Боковые ребра пирамиды с объемом 60 составляют с основанием равные углы. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 4 и 5.
Найдите высоту пирамиды.



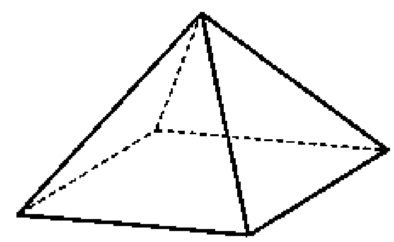
Ответ:

99 В основании пирамиды лежит параллелограмм с периметром 24 и острым углом 30°. Найдите объем пирамиды, если высота пирамиды равна 3, а двугранные углы при ребрах основания равны между собой.



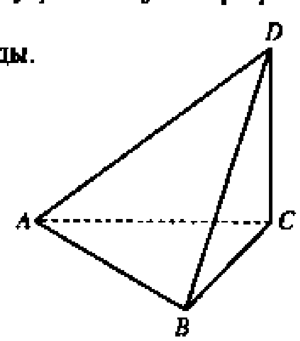
Ответ:

100 В основании пирамиды лежит прямоугольник, все боковые грани наклонены к основанию под углом 45°, высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



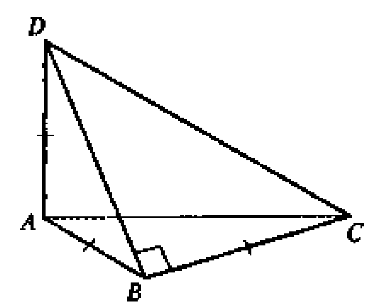
Ответ:

101 Боковое ребро DC перпендикулярно основанию, $DC = 6$, $AB = 8$, двугранный угол при ребре AB равен 45°.
Найдите объем пирамиды.



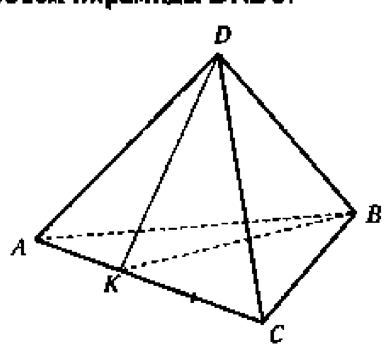
Ответ:

102 Боковые грани DAB и DAC перпендикулярны основанию, ребро DB перпендикулярно ребру BC. $AB = DA = BC = 6$. Найдите объем пирамиды.



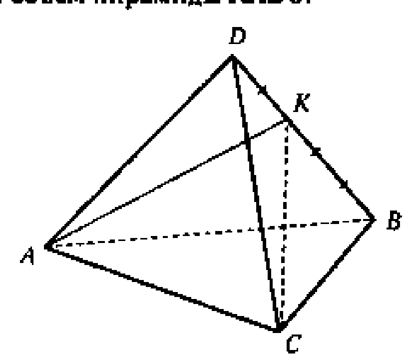
Ответ:

103 Объем пирамиды $DABC$ равен 60, $AK : KC =$ $= 1 : 2$. Найдите объем пирамиды $DKBC$.



Ответ:

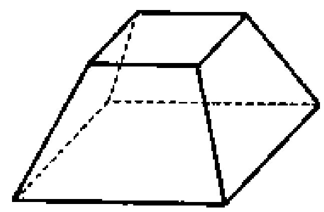
104 Объем пирамиды $DABC$ равен 90, $DK : KB =$ $= 2 : 3$. Найдите объем пирамиды $KABC$.



Ответ:

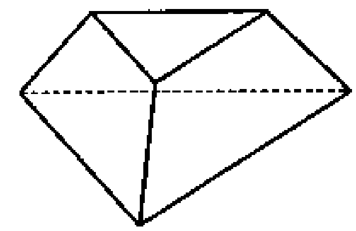
Объем усеченной пирамиды

105* Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 и 3, высота — 3. Найдите объем данной пирамиды.



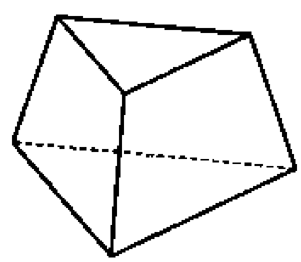
Ответ:

106* Площади оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 9 и 16, высота — 6. Найдите объем данной пирамиды.



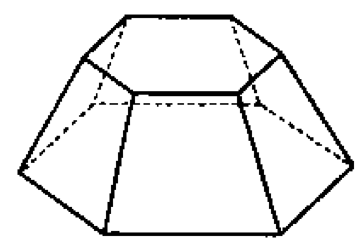
Ответ:

107* Высота усеченной пирамиды равна 3, сторона меньшего основания в 2 раза меньше стороны большего основания, площадь которого равна 12. Найдите объем данной пирамиды.



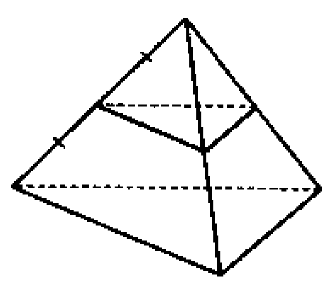
Ответ:

108* Высота усеченной пирамиды равна 6, отношение периметров оснований равно 2 : 3. Площадь меньшего основания равна 8. Найдите объем данной пирамиды.



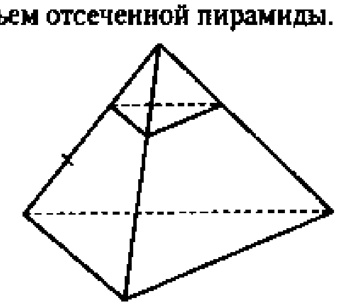
Ответ:

109* Через середину бокового ребра пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите отношение объема данной пирамиды к объему отсеченной.



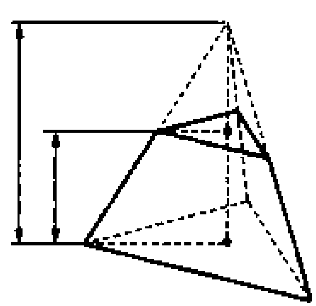
Ответ:

110* Объем пирамиды 81. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит боковое ребро в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите объем отсеченной пирамиды.



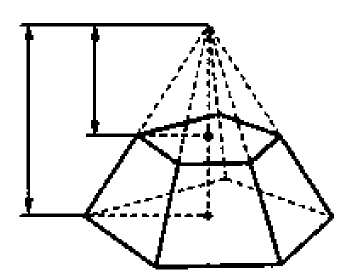
Ответ:

111* Объем полной пирамиды равен 72. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота в 2 раза меньше высоты полной пирамиды.



Ответ:

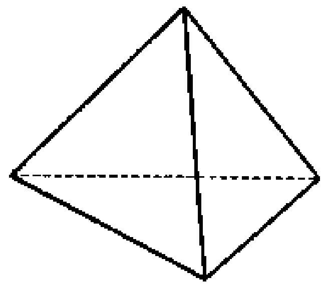
112* Объем данной пирамиды равен 250. Высоты данной и отсеченной пирамиды относятся как 5 : 3. Найдите объем усеченной пирамиды.



Ответ:

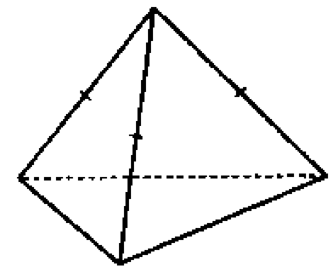
Объем пирамиды

113 Все боковые ребра тетраэдра наклонены к основанию под углом 45°, стороны основания равны 6, 8, 10. Найдите объем пирамиды.



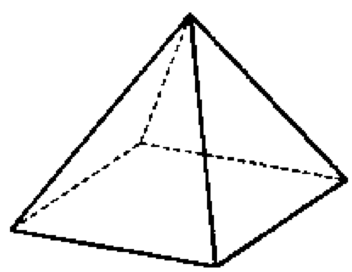
Ответ:

114 Все боковые ребра пирамиды равны по $10\sqrt{2}$, в основании лежит треугольник со сторонами 12, 16, 20. Найдите объем пирамиды.



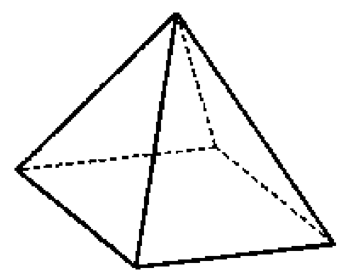
Ответ:

115 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет угол 45° с основанием, площадь диагонального сечения – 9. Найдите объем пирамиды.



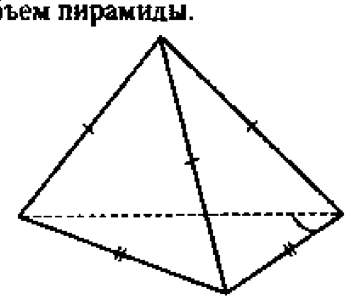
Ответ:

116 Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а площадь основания 8. Найдите объем пирамиды.



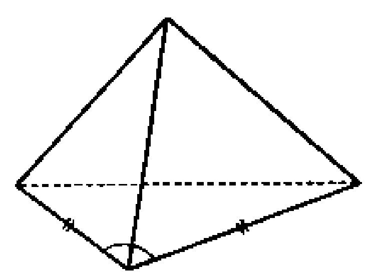
Ответ:

117° Все боковые ребра пирамиды равны по $2\sqrt{7}$, в основании лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом при основании 30°. Найдите объем пирамиды.



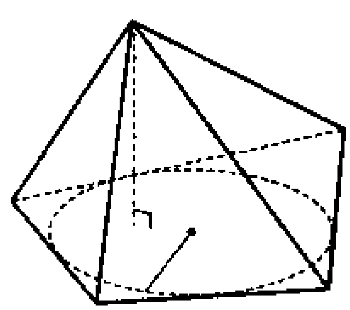
Ответ:

118° Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°, в основании лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 и углом при вершине 120°. Найдите объем пирамиды.



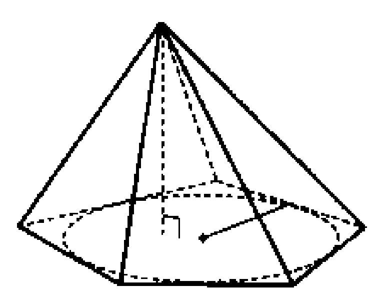
Ответ:

119 Периметр основания четырехугольной пирамиды равен 20, радиус вписанной в него окружности 2, высота пирамиды 3. Найдите объем пирамиды.



Ответ:

120 Периметр основания пятиугольной пирамиды равен 24, радиус вписанной в него окружности 3, объем пирамиды равен 48. Найдите высоту пирамиды.

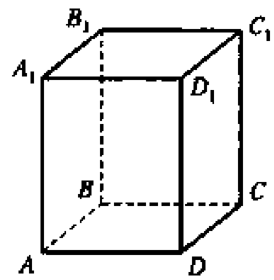


Ответ:

Контрольная работа по теме «Объемы многогранников»

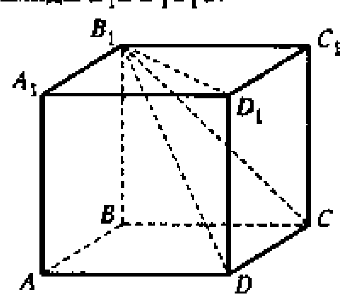
Вариант 1

(1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед с измерениями 4 см, 6 см и 10 см. Его объем равен:
1) 240 см^3;
2) 80 см^3;
3) 124 см^3;
4) 248 см^3.



Ответ:

(2) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с объемом 27 см^3. Найдите объем пирамиды $B_1DD_1C_1C$.



Ответ:

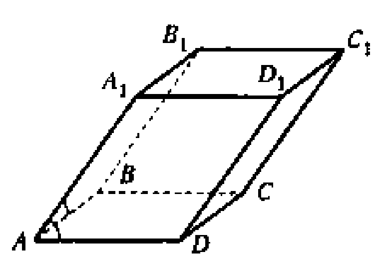
(3) В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна 8 см, боковое ребро — 5 см. Найдите объем пирамиды.

Ответ:

(4) Найдите объем правильного тетраэдра с ребром 1 см.

Ответ:

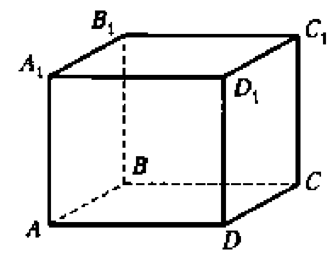
(5*) В основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной 4 см, боковое ребро равно $6\sqrt{2}$ см и образует с двумя смежными ребрами углы по 60°. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

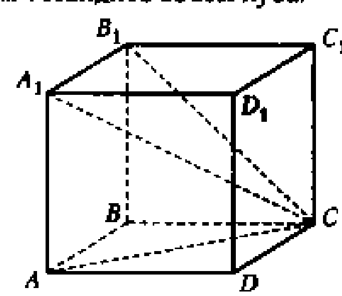
Вариант 2

(1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед с измерениями 9 см, 9 см и 10 см. Его объем равен:
1) 252 см^3;
2) 270 см^3;
3) 810 см^3;
4) 504 см^3.



Ответ:

(2) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Объем пирамиды CAA_1B_1B равен 72 см^3. Найдите объем куба.



Ответ:

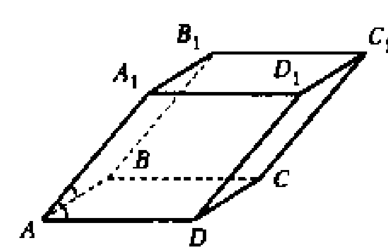
(3) В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 8 см, боковое ребро — 10 см. Найдите объем пирамиды.

Ответ:

(4) Найдите объем правильного тетраэдра с высотой 1 см.

Ответ:

(5*) Боковые грани призмы — равные ромбы со стороной $\sqrt{8}$ см и углом 60°, боковое ребро составляет с основанием угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ:

ТЕМА 3

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Известно, что к Земле летит астероид под названием Апофис. Его размер составляет два футбольных поля. Это установили астрономы из НАСА в 2004 году. Первый раз близко к планете он подойдет в 2029 году на расстояние, равное пяти радиусам Земли, что является значительным событием. Вероятность столкновения в этот период очень мала, и вообще, астрономы из НАСА считают, что столкновения астероида с Землей удастся избежать. Российские же ученые утверждают, что 13 апреля 2036 года это все-таки произойдет. Столкновение с таким астероидом будет означать конец человеческой цивилизации. Так кто же прав: американцы или русские, и когда наступит час «Х»?

В дюзах Вечности звезды горят,
Обгорают миры дочерна.
А у нас на Земле листопад,
А у нас на Земле тишина.

Скоростей галактический вой
Оглашает космический ад.
А у нас над твоей головой
Обездоленно листья шумят.

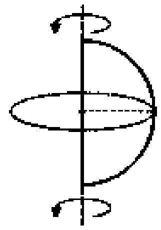
Вслед за вспышкой сверхновой звезды
Трагедийная гибель планет,
А у нас облетают сады
И спокойно приходит рассвет.

Над последним пятном хризантем,
Над склоненной твоей головой, –
Низверженье, крушенье систем,
Скоростей галактический вой...

Как услышать, понять, ощутить
Этот гром, что гремит вдалеке,
Бесконечность соединить
С горстью листьев в бессильной руке?

Над спиралями наших забот,
Над туманностью наших невзгод
В дюзах Вечности звезды горят,
Листопад, листопад, листопад...

Шар

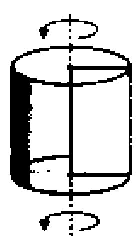


Сфера — это замкнутая поверхность, оболочка, все точки которой равноудалены от одной точки — ее центра. **Шар** — это часть пространства, ограниченная сферой. То есть сфера внутри пустая, а геометрический шар — это сплошное тело (земной шар). А вот воздушный шар, говоря на языке математики, это сфера. Сфера — это поверхность шара. Шар может быть получен от вращения круга или полукруга вокруг диаметра.

Площадь сферы $S_{сферы} = 4\pi R^2$.

Объем шара $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Цилиндр



Если вращать прямоугольник вокруг одной из сторон, получим **цилиндр**. У цилиндра два основания — два равных круга, лежащих в параллельных плоскостях. Радиус каждого из кругов равен длине стороны прямоугольника вращения. *Боковая поверхность цилиндра* — это прямоугольник, свернутый в трубочку. Нижняя его сторона равна длине окружности основания цилиндра, а вторая — высоте цилиндра.

Площадь поверхности цилиндра

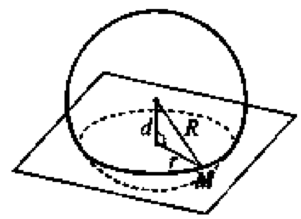
$$S_{цил} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$

Объем цилиндра

$$V_{цил} = S_{осн} \cdot h.$$

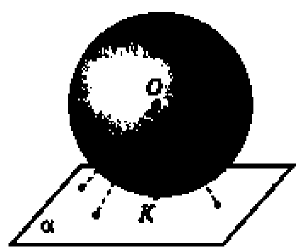
Шар и сфера

Сфера — это множество всех точек пространства, равноудаленных от данной точки — ее центра.
Шар — это множество всех точек пространства, ограниченных сферой.
Радиус сферы — отрезок, соединяющий центр сферы и любую ее точку.
Хорда сферы — отрезок, соединяющий две точки сферы.
Диаметр сферы — хорда сферы, проходящая через ее центр.
Радиус, хорда, диметр шара — это радиус, хорда, диаметр его сферы.
Сечение сферы плоскостью — окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.



Доказательство. M — точка пересечения сферы плоскостью. Из центра сферы опустим перпендикуляр d на секущую плоскость. Из прямоугольного треугольника $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
R — постоянно, d — постоянно, значит, r — постоянно, т. е. все точки пересечения плоскости и сферы лежат на окружности.

Большая окружность сферы — сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр.
Сечение шара плоскостью — круг.
Большой круг шара — сечение шара плоскостью, проходящей через его центр.
Касательная плоскость к сфере (шару) — это плоскость, которая имеет со сферой (шаром) единственную общую точку.



Свойство касательной плоскости к сфере. *Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.*

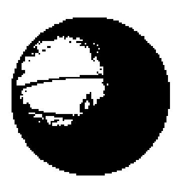
Доказательство. Плоскость α касается сферы в точке K; K — единственная общая точка; другие точки плоскости лежат вне сферы — они дальше от центра; OK — кратчайшее расстояние от точки до плоскости; кратчайшее расстояние измеряется длиной перпендикуляра; $OK \perp \alpha$.

Признак касательной плоскости к сфере. *Плоскость, перпендикулярная радиусу сферы в конечной его точке на сфере, является касательной к сфере.*

Доказательство. Для доказательства признака воспользуйтесь доказательством предыдущего свойства, изложив рассуждения в обратном порядке, т. е. от конца — к началу.

Следствие. Прямая, касательная к сфере (шару), — это прямая, которая имеет со сферой (шаром) единственную общую точку.
Касательная прямая к сфере (шару) лежит в касательной плоскости, которая проходит через ту же точку касания.
Радиус, проведенный в точку касания прямой и сферы (шара), перпендикулярен к касательной прямой.
Прямая, перпендикулярная радиусу сферы (шара) в конечной его точке на сфере, является касательной к сфере (шару).

Запомните!



Площадь сферы (поверхности шара) $\boxed{S_{сферы} = S_{шара} = 4\pi R^2}$

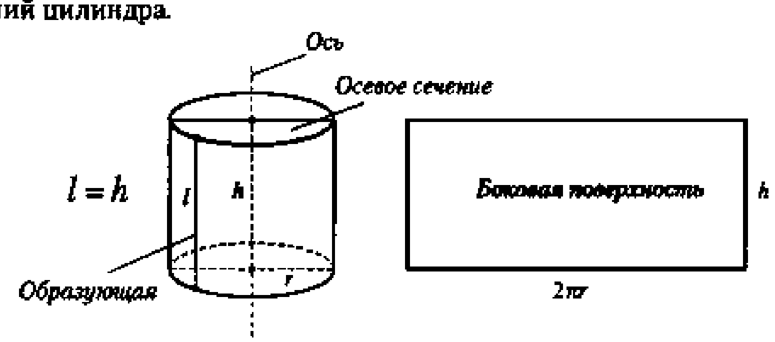
Объем шара $\boxed{V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3}$

Пример. Площадь поверхности шара равна 144π. Найдите объем шара.

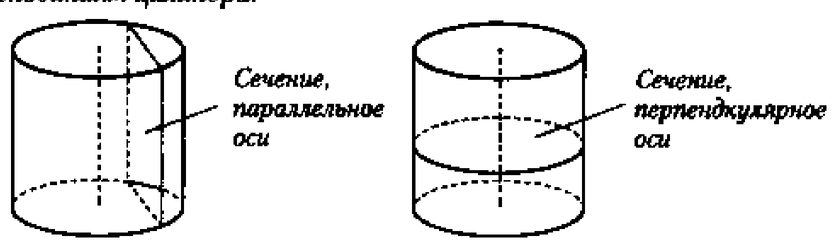
Решение. $S_{шара} = 4\pi R^2 = 144\pi$; $R^2 = 36$, $R = 6$; $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.

Цилиндр

Цилиндр — тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его сторон.
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований цилиндра.



Основания цилиндра — два равных параллельных круга радиуса r.
Образующая цилиндра l — отрезок, соединяющий окружности оснований и перпендикулярный основаниям.
Высота цилиндра h — перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания на другое. Образующая цилиндра равна его высоте, т. е. $l = h$.
Осевое сечение цилиндра — сечение, проходящее через ось цилиндра. Оно является прямоугольником, две противоположные стороны которого — образующие, две другие — диаметры оснований цилиндра.
Сечение, параллельное оси цилиндра, является прямоугольником.
Сечение, перпендикулярное оси цилиндра, является кругом, равным основаниям цилиндра.



Боковая поверхность цилиндра может быть развернута в прямоугольник со сторонами, одна из которых равна длине окружности основания $C = 2\pi r$, другая — высоте цилиндра h.

Площадь боковой поверхности цилиндра

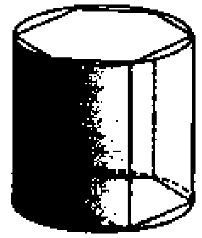
$$\boxed{S_{бок\ цил} = C \cdot h = 2\pi rh = 2\pi rl}$$

Площадь полной поверхности цилиндра

$$\boxed{S_{полн\ цил} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

Объем цилиндра

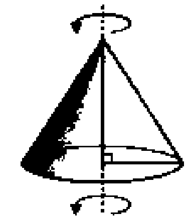
$$\boxed{V_{цил} = S_{осн} h = \pi r^2 h}$$



Доказательство того, что $\boxed{V_{цил} = S_{осн\ цил} \cdot h}$

Если вписать в цилиндр правильную n-угольную призму (основания призмы вписаны в основания цилиндра, высота h — общая), то при увеличении числа n площадь основания призмы будет стремиться к площади основания цилиндра, а объем призмы $V_{пр} = S_{осн\ пр} \cdot h$ — к объему цилиндра $V_{цил} = S_{осн\ цил} \cdot h$.

Конус



Если вращать прямоугольный треугольник вокруг одного из катетов, получим **конус**. У конуса одно основание — круг, радиус которого равен другому катету указанного треугольника.

Площадь поверхности конуса

$$S_{кон} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Объем конуса $V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$.

Любимая задача Архимеда

На могиле Архимеда был поставлен памятник с изображением шара и описанного около него цилиндра. Эпитафия указывала, что объемы этих тел относятся как 2 : 3 — открытие Архимеда, которое он особенно ценил.

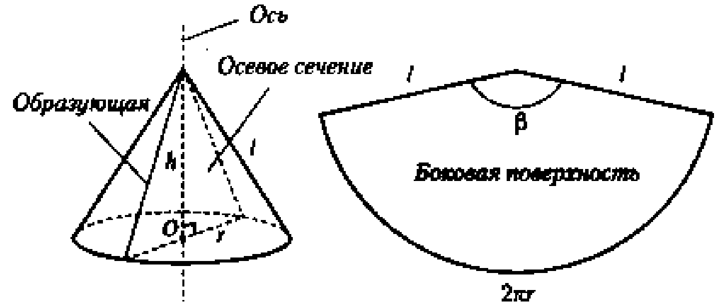
Архимед жил в Греции в городе Сиракузы в III веке до нашей эры. Знаменитый ученый, геометр, механик сделал множество открытий. Например, Архимед сумел ответить на вопрос, сделана корона царя Гиерона из чистого золота или ювелир подмешал туда некоторое количество бронзы. Формула $m = \rho V$, где r — плотность, m — масса, V — объем, известна, и по ней можно было определить плотность короны и сравнять ее с плотностью золота. Но проблема была в том, что корона имела сложную форму и найти ее объем никак не удавалось. Архимед все время размышлял над этой задачей и однажды, лежа в ванне, догадался, как измерить объем золотой короны. Нужно погрузить корону в воду и измерить объем вытесненной ею жидкости! Сегодня это первый закон гидростатики.
(Фильм про Архимеда: http://video.mail.ru/mail/serjaza/-11166.html)

Простые и непростые вопросы

1. Что представляет собой сечение сферы плоскостью?
2. Что представляет собой сечение шара плоскостью?
3. Что является осевым сечением цилиндра?
4. Как называется цилиндр, осевое сечение которого — квадрат?
5. Что является осевым сечением конуса?
6. Может ли осевое сечение конуса быть прямоугольным треугольником?
7. Как называется конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник?
8. Что является осевым сечением усеченного конуса?
9. Выражение $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ позволяет найти ...
10. Чему равен радиус шара, объем которого $\frac{4\pi}{3}$ см^3?
11. Объем шара равен 36π см^3. Чему равно расстояние от центра шара до точки на его поверхности?
12. Образующая конуса равна 4, радиус основания равен 2, $\pi \approx 3$. Чему равна боковая поверхность конуса?
13. Площадь основания цилиндра равна 12π, площадь его боковой поверхности равна 20π. Чему равна площадь полной поверхности цилиндра?
14. Площадь полной поверхности конуса равна 24π, площадь основания конуса равна 16π. Чему равна площадь боковой поверхности конуса?
15. Площадь боковой поверхности конуса равна 15π, образующая конуса равна 5. Чему равна высота конуса?
16. Во сколько раз площадь поверхности шара больше площади большого круга шара?
17. Радиус сферы увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличилась площадь сферы?
18. Радиус шара увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличился объем шара?
19. Как относится объем цилиндра к объему вписанного в него шара?

Конус

Конус — тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, проходящей через один из его катетов.



Осью конуса называется прямая вращения.
Основание конуса — круг радиуса r, который равен катету треугольника вращения.
Вершина конуса — неподвижная вершина треугольника вращения.
Образующая конуса l — отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания.
Высота конуса h — перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость его основания. Высота конуса совпадает с неподвижным катетом треугольника вращения.
Связь высоты h, образующей l и радиуса r основания конуса: $l^2 = r^2 + h^2$.
Боковая поверхность конуса может быть развернута в СЕКТОР круга с радиусом l, равным образующей конуса, и дугой, равной окружности основания конуса $C = 2\pi r$.
Осевое сечение конуса — сечение, проходящее через ось конуса. Оно является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого — образующие, а основание — диаметр основания конуса.

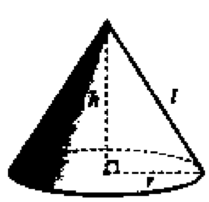
Площадь боковой поверхности конуса $\boxed{S_{\text{бок кон}} = \frac{1}{2}C \cdot l = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r = \pi r l}$

Площадь полной поверхности конуса $\boxed{S_{\text{полн кон}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi r l + \pi r^2}$

Объем конуса $\boxed{V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

<u>Доказательство</u> того, что $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Если вписать в конус правильную n-угольную пирамиду (основание пирамиды вписано в основания конуса, вершины совпадают, h — общая высота), то при неограниченном увеличении числа n площадь основания пирамиды будет стремиться к площади основания конуса. Объем пирамиды $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн пир}} \cdot h$ будет стремиться к объему конуса $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн кон}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



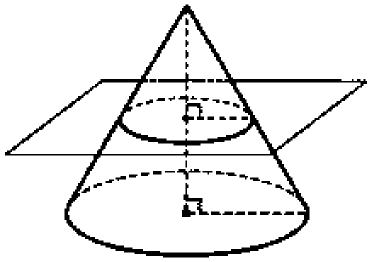
Площадь боковой поверхности конуса $\boxed{S_{\text{бок кон}} = \pi r l}$

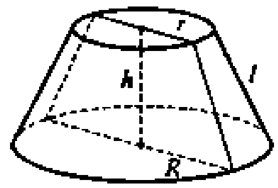
Объем конуса $\boxed{V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h}$

Пример. Радиус основания конуса и высота равны 3 и 4. Образующая конуса $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

Сечение, перпендикулярное оси конуса, является кругом.

Усеченный конус — часть конуса, заключенная между основанием и перпендикулярным сечением. Он имеет ось, высоту h, радиусы оснований r и R, образующую l. Осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция.





Площадь боковой поверхности усеченного конуса и объем усеченного конуса равен разности площадей боковых поверхностей и объемов полного конуса и отсеченного: $S_{бок} = S_{бок\ 1} - S_{бок\ 2}$ и $V = V_1 - V_2$.

Усеченный конус

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований C_1 и C_2 на образующую l:

$$\boxed{S_{бок\ ус\ кон} = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l}$$

Объем усеченного конуса

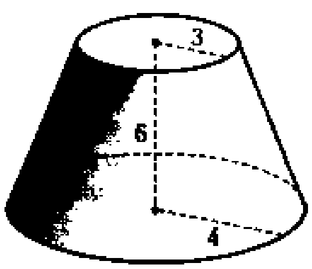
$$\boxed{V_{ус\ кон} = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)},$$

где S_1, S_2 — площади оснований, h — высота усеченного конуса.

Запомнить эту формулу можно так:

Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов с той же высотой и основаниями, одно из которых равно большему основанию усеченного конуса, другое — меньшему основанию, третье — среднему арифметическому двух первых оснований.

Пример. Дан усеченный конус с радиусами оснований 3 см и 4 см и высотой 6 см. Найдите объем данного конуса.

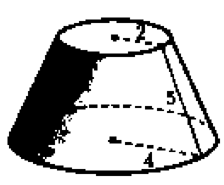


Решение. $V_{ус\ кон} = \frac{1}{3} h \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.

$$V_{ус\ кон} = \frac{1}{3} h \cdot \left(\pi R_1^2 + \sqrt{\pi R_1^2 \cdot \pi R_2^2} + \pi R_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi h \cdot \left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 6 \cdot \left(3^2 + 3 \cdot 4 + 4^2\right) = 2\pi \cdot 37 = 74\pi\,(см^3).$$



Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$\boxed{S_{бок\ ус\ кон} = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l}$$

Пример. Если радиусы оснований усеченного конуса 2 и 4, а образующая 5, то площадь его боковой поверхности

$$S_{бок\ ус\ кон} = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot l = \frac{2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 4}{2} \cdot 5 = 30\pi.$$

20. Чему равно отношение площади сечения конуса плоскостью, перпендикулярной его оси и проходящей через середину высоты конуса, к основанию конуса?
21. Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна 16 см^2. Чему равен объем цилиндра?
22. Если металлический равносторонний цилиндр переплавить в равносторонний конус, что будет больше: радиус основания цилиндра или радиус основания конуса?
23. Если цилиндр и конус имеют равные объемы и равные радиусы оснований, то что больше: высота цилиндра или высота конуса?
24. Если высоту цилиндра увеличить в 2 раза, а радиус основания уменьшить в 2 раза, то как изменится объем цилиндра?
25. Если высоту конуса уменьшить в 2 раза, а радиус основания увеличить в 2 раза, то как изменится объем конуса?
26. Если в равносторонний цилиндр вписан шар и вокруг этого цилиндра описан шар, то как относятся диаметры этих шаров?
27. Если в куб вписан и вокруг куба описан шар, то как относятся радиусы этих шаров?
28. Как относятся объемы конусов, имеющих общую высоту?
29. Как относятся объемы конусов, имеющих общее основание?
30. Как относится объем равностороннего конуса к объему описанного около него шара?
31. Площадь боковой поверхности цилиндра равна P, площадь его полной поверхности равна T. Чему равна площадь основания цилиндра?
32. Объем конуса равен G, площадь основания равна Q. Чему равна высота конуса?
33. Площадь большого круга шара равна Q. Чему равна площадь поверхности шара?
34. Объем конуса равен 12π, высота конуса равна 4. Чему равна площадь основания?
35. Секущая плоскость делит шар на две части, объемы которых равны 16π и 20π. Чему равна площадь поверхности шара?
36. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат с диагональю $2\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Два определения сферы (как множества точек и как тела вращения).
2. Два определения шара (как множества точек и как тела вращения).
3. Радиус, хорда, диаметр сферы или шара.
4. Сечение сферы и шара плоскостью. Доказательство.
5. Большая окружность сферы. Большой круг шара.
6. Плоскость, касательная к сфере.
7. Свойство касательной плоскости. Доказательство*.
8. Признак касательной плоскости. Доказательство*.
9. Касательная прямая к сфере. Свойство и признак касательной прямой.
10. **Формула площади сферы (поверхности шара).**
11. **Формула объема шара.**
12. Определение цилиндра как тела вращения.
13. Ось цилиндра. Основания цилиндра.
14. Высота цилиндра.
15. Образующая цилиндра.
16. Осевое сечение цилиндра.
17. Сечение, параллельное оси цилиндра.
28. Сечение, перпендикулярное оси цилиндра.
19. Развертка боковой поверхности цилиндра.
20. **Формула площади боковой поверхности цилиндра.**
21. **Формула площади полной поверхности цилиндра.**
22. **Формула объема цилиндра. Доказательство.**
23. Определение конуса как тела вращения.
24. Ось конуса. Основание конуса. Вершина конуса.
25. Высота конуса.
26. Образующая конуса.
27. Развертка боковой поверхности конуса.
28. **Формула площади боковой поверхности конуса.**
29. **Формула площади полной поверхности конуса.**
30. **Формула объема конуса. Доказательство.**
31. Усеченный конус, его элементы, осевое сечение.

32*. Формула объема усеченного конуса.

Образцы устных ответов на контрольные вопросы (№ 21, № 22, № 29, № 30):

21. *Площадь полной поверхности цилиндра равна площади боковой поверхности плюс две площади оснований, т. е.* $2\pi rh + 2\pi r^2$.

22. *Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т. е.* $\pi r^2 h$. *Доказательство. Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму и будем увеличивать количество сторон n. Тогда объем призмы, равный произведению площади основания на высоту, будет стремиться к объему цилиндра. Поэтому объем цилиндра также равен произведению площади основания на высоту.*

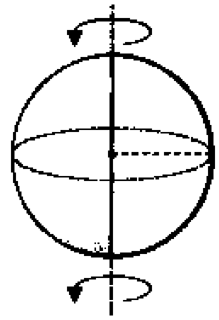
29. *Площадь полной поверхности конуса равна площади боковой поверхности плюс площадь основания, т. е.* $\pi rl + \pi r^2$.

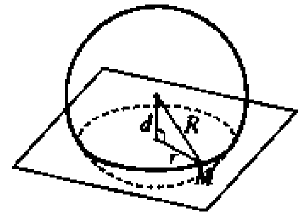
30. *Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е.* $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. *Доказательство. Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду и будем увеличивать количество сторон n. Тогда объем пирамиды, равный произведению* $\frac{1}{3}$ *площади основания на высоту, будет стремиться к объему конуса. Поэтому объем конуса также равен произведению* $\frac{1}{3}$ *площади основания на высоту.*

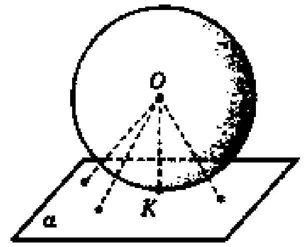
Замечание. Вместо маленьких букв r, h, l употребляют и большие буквы: $S_{\text{бок кон}} = \pi RL$, $V_{\text{цил}} = \pi R^2 H$.

Сфера и шар

№ 3



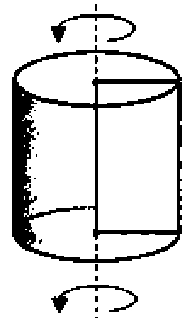




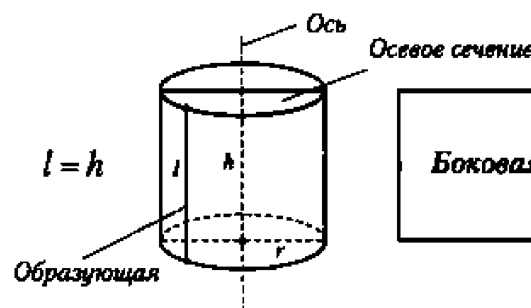
$$\boxed{S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2}$$

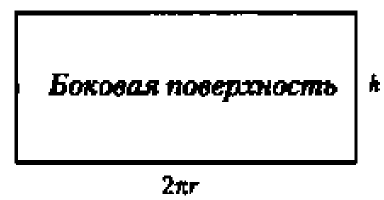
$$\boxed{V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

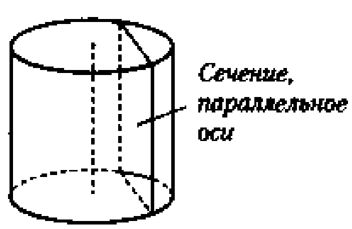
Цилиндр

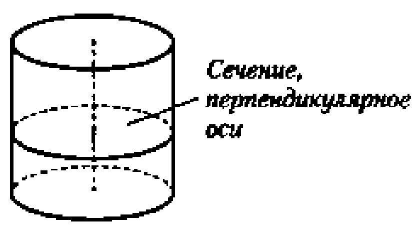


$l = h$







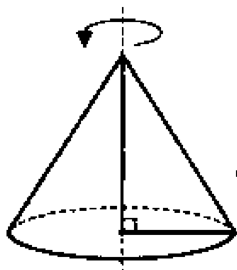


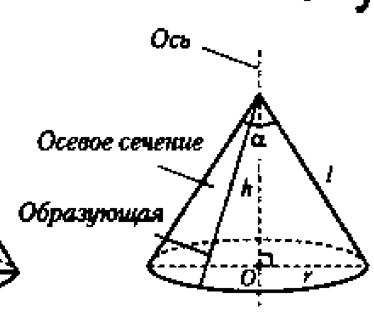
$$\boxed{S_{\text{бок цил}} = 2\pi rh}$$

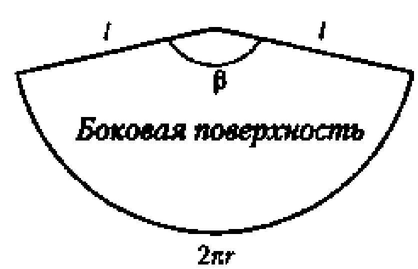
$$\boxed{S_{\text{полн цил}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}}$$

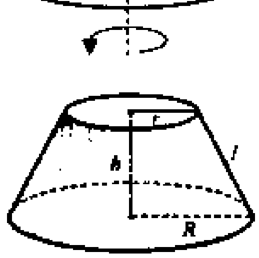
$$\boxed{V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}}h}$$

Конус









$$\boxed{S_{\text{бок кон}} = \pi rl}$$

$$\boxed{S_{\text{полн цил}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}}$$

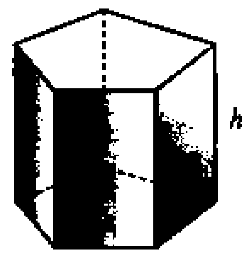
$$\boxed{V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h}$$

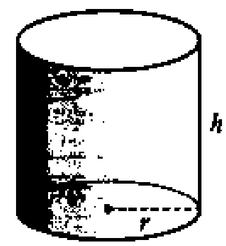
$$\boxed{S_{\text{бок ус кон}} = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l}$$

$$\boxed{V_{\text{ус кон}} = V_1 - V_2}$$

КАК ЗАПОМНИТЬ ФОРМУЛЫ

1. Площади боковой поверхности прямой призмы и цилиндра находятся одинаково — это произведение периметра основания на высоту (периметр круга — окружность).



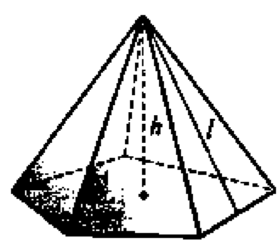


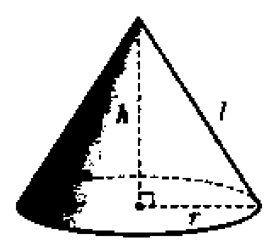
$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h \qquad\qquad S_{бок} = C_{осн} \cdot h = 2\pi r \cdot h$$

Объемы прямой призмы и цилиндра также находятся одинаково — это произведение площади основания на высоту:

$$V = S_{осн} \cdot h.$$

2. Площади боковой поверхности правильной пирамиды и конуса находятся одинаково — это $\frac{1}{2}$ произведения периметра основания на апофему или на образующую.





$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l \qquad\qquad S_{бок} = \frac{1}{2} C_{осн} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi r l$$

Объемы пирамиды и конуса также находятся одинаково — это произведение $\frac{1}{3}$ площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h.$$

3*. Площадь поверхности шара — это производная его объема: $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3} \cdot 3\pi R^2 = 4\pi R^2.$

Объем шара радиуса R — это объем конуса с площадью основания, равной площади поверхности шара, и высотой, равной радиусу шара:

$$V_{шара} = \frac{1}{3} \cdot S_{шара} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Вписанные и описанные геометрические тела

Шар и цилиндр. *Шар (сфера) называется вписанным в цилиндр, если он касается оснований цилиндра и всех его образующих по окружности большого круга.*

Шар (сфера) называется описанным около цилиндра, если окружности оснований цилиндра касаются поверхности шара (сферы).

И в том и в другом случае ось цилиндра проходит через центр шара.

Шар и конус. *Шар (сфера) называется вписанным в конус, если его поверхности касаются основания конуса и всех его образующих.*

Шар (сфера) называется описанным около конуса, если окружность основания конуса и его вершина лежат на поверхности шара (сферы).

И в том и в другом случае ось конуса проходит через центр шара (сферы).

Призма и цилиндр. *Призма называется вписанной в цилиндр или описанной около цилиндра, если ее основания вписаны в основания цилиндра или описаны около них. Боковые поверхности призмы и цилиндра касаются по образующим цилиндра.*

При этом призма является правильной, ее высота равна высоте цилиндра.

Пирамида и конус. *Пирамида называется вписанной в конус или описанной около конуса, если ее основание вписано в основание конуса или описано около него, а вершины пирамиды и конуса совпадают. При этом высота пирамиды и высота конуса совпадают, а боковые поверхности пирамиды и конуса касаются по образующим конуса.*

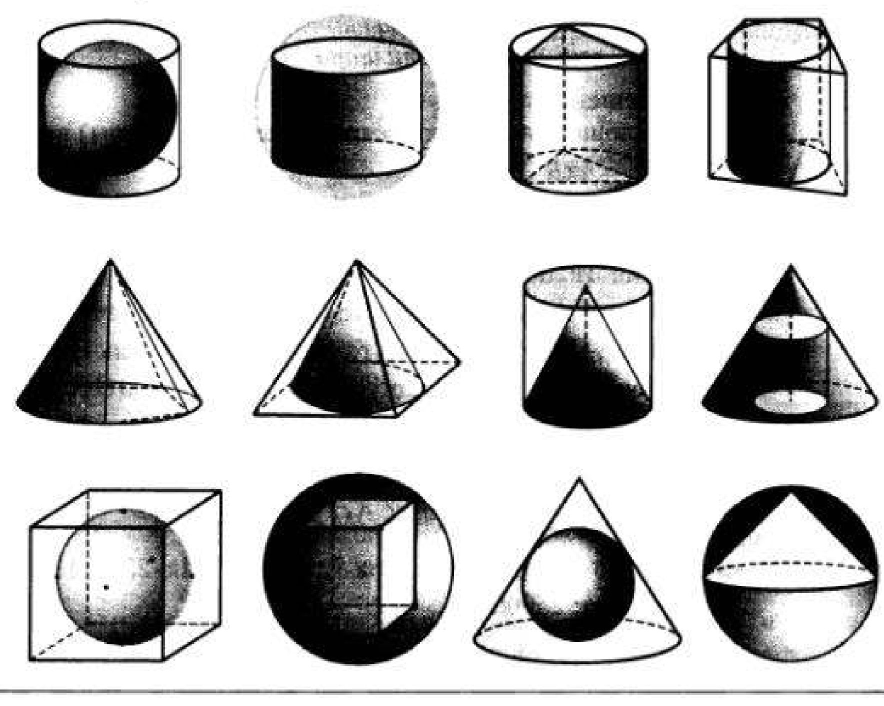
Цилиндр и конус. *Цилиндр называется вписанным в конус, если окружность одного из оснований цилиндра принадлежит боковой поверхности конуса, а другое основание — основанию конуса. При этом конус называется описанным около цилиндра.*

Цилиндр называется описанным около конуса, если основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина конуса принадлежит другому основанию цилиндра. При этом конус называется вписанным в цилиндр.

Во всех перечисленных случаях оси конусов и цилиндров совпадают, а высоты равны между собой.

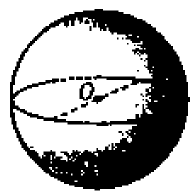
Шар и многогранник. *Шар называется вписанным в многогранник, если он касается всех его граней. Шар называется описанным около многогранника, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.*

Если шар можно вписать в параллелепипед или описать около него, то центр шара находится в точке пересечения диагоналей параллелепипеда.



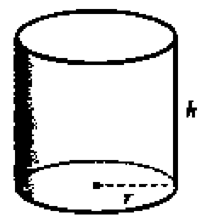
КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Начальный уровень



№ 1. *Объем шара равен 36π см^3. Найдите диаметр шара.*

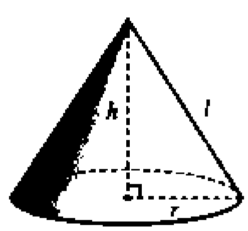
Решение.
Объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$. По условию $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, откуда $4\pi R^3 = 3 \cdot 36\pi$,
$R^3 = 3 \cdot 9$, $R = 3$ (см) — радиус данного шара, $D = 2R = 6$ см — диаметр.
Ответ: 6 см.



№ 2. *Радиус основания цилиндра равен 4 см, высота цилиндра равна диаметру его основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.*

Решение.
Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок\ цил} = 2\pi rh$. Согласно условию высота цилиндра $h = 2r = 2 \cdot 4 = 8$ (см). Тогда $S_{бок\ цил} = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 =$
$= 64\pi$ (см^2).
Ответ: 64π см^2.

<u>Замечание.</u> Цилиндр, у которого высота равна диаметру основания, называется равносторонним цилиндром.

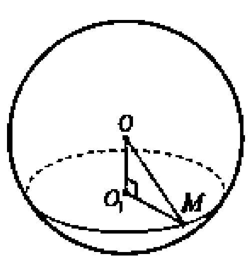


№ 3. *Радиус основания конуса равен 3 см, высота конуса — 4 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса.*

Решение.
Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок\ кон} = \pi rl$, где l — образующая. По теореме Пифагора $l^2 = r^2 + h^2$. Тогда $l^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, $l = \sqrt{25} = 5$ (см). $S_{бок\ кон} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$ (см^2). Объем конуса $V_{кон} =$
$= \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (см^3).
Ответ: 15π см^2; 12π см^3.

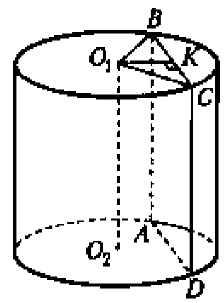
Повышенный уровень

№ 4. *Шар пересечен плоскостью. Площадь сечения равна 576π см^2. Расстояние от центра шара до плоскости сечения равно 7 см. Найдите площадь поверхности шара.*



Решение.
Площадь поверхности шара (площадь сферы) находится по формуле $S_ш = 4\pi R^2$.
Сечение шара плоскостью — круг, центр которого совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость сечения. Из центра шара O опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость сечения и проведем радиус O_1M кругового сечения, соединим точки O и M. Получим прямоугольный треугольник OO_1M, у которого гипотенуза $OM = R$ — радиус шара. По условию $OO_1 = 7$ см, площадь круга с радиусом O_1M равна 576π см^2. Так как площадь круга $S = \pi r^2$, то $\pi \cdot O_1M^2 = 576\pi$; $O_1M^2 = 576$; $O_1M = 24$ см. Из прямоугольного треугольника OO_1M находим $OM = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ (см). Площадь поверхности шара $S_ш = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25^2 = 4 \cdot 625\pi = 2500\pi$ (см^2).
Ответ: 2500π см^2.

№ 5. *Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной* *его оси и проходящей на расстоянии 4 см от нее, если площадь полной поверхности цилиндра равна 250π см^2, а площадь боковой поверхности 200π см^2.*



Решение.

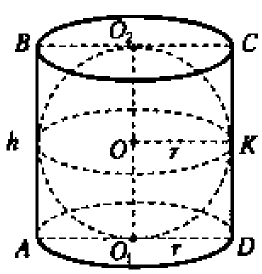
Площадь полной поверхности цилиндра $S_{цил} = S_{бок} + 2S_{осн}$. По условию $S_{цил} = 250\pi$ см^2, $S_{бок} = 200\pi$ см^2, откуда $2S_{осн} = S_{цил} - S_{бок} = 250\pi - 200\pi = 50\pi$ см^2, $S_{осн} = 25\pi$ см^2. Так как $S_{осн} = \pi r^2$, то $\pi r^2 = 25\pi$, $r^2 = 25$, $r = 5$ (см) — радиус основания цилиндра. Так как $S_{бок} = 2\pi rh$, то $2\pi\cdot 5\cdot h = 200\pi$, $h = 20$ (см) — высота цилиндра.

Пусть прямоугольник $ABCD$ — данное сечение. Так как образующая цилиндра перпендикулярна основаниям цилиндра, то плоскость $ABCD$ перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра. Проведем из центра O_1 верхнего основания $O_1K \perp BC$. Перпендикуляр, проведенный в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей к линии их пересечения, будет перпендикуляром и к другой плоскости. Тогда $O_1K \perp$ пл. $ABCD$, и поэтому $O_1K = 4$ см как расстояние от оси цилиндра O_1O_2 до плоскости сечения.

Треугольник O_1BC — равнобедренный ($O_1B = O_1C = r$ — радиусы основания цилиндра). По свойству равнобедренного треугольника данная высота O_1K является и медианой, т. е. $BK = KC$. Из прямоугольного треугольника O_1KC по теореме Пифагора вычислим отрезок $KC = \sqrt{O_1C^2 - O_1K^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). $BC = 2KC = 6$ см. Образующие цилиндра равны его высоте, т. е. $AB = h = 20$ см. Площадь искомого сечения $S_{ABCD} = BC\cdot AB = 6\cdot 20 = 120$ (см^2).

Ответ: 120 см^2.

№ 6. *(Задача Архимеда.) В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему конуса.*

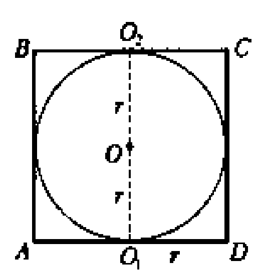


Решение.

Шар, вписанный в цилиндр, касается оснований цилиндра в их центрах и боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга, параллельной основаниям цилиндра. Отсюда следует, что радиус вписанного шара равен радиусу основания цилиндра, а высота цилиндра равна диаметру вписанного шара, т. е. $h = 2r$.

Объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$, объем данного цилиндра $V_{цил} = S_{осн}\cdot h = \pi r^2\cdot 2r = 2\pi r^3$. Отсюда $\frac{V_ш}{V_{цил}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.



Замечания.

1. Во времена Архимеда формула объема шара была неизвестна. Поэтому данная задача считалась очень трудной и, решив ее, Архимед испытал большую радость.

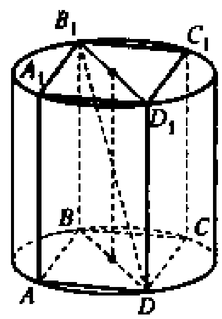
2. Задачи на вписанные и описанные тела вращения часто сводят к задачам планиметрии, проведя осевое сечение. Так, если в нашей задаче провести осевое сечение цилиндра, то в сечении шара получим большой круг шара, вписанный в осевое сечение цилиндра.

Как показано выше, осевое сечение такого цилиндра — квадрат. Такой цилиндр называется *равносторонним цилиндром*.

№ 7. *Призма со сторонами основания 3 см и 4 см и диагональю 13 см вписана в цилиндр. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.*

Решение.

Призма называется вписанной в цилиндр, если ее основания вписаны в основания цилиндра. Пусть $AD = 3$ см, $AB = 4$ см, $B_1D = 13$ см. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то BD — диаметр описанного круга. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см). Так как $BB_1 \perp$ плоскости $ABCD$, то из прямоугольного треугольника B_1BD находим $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).



$BD = 2r = 5$ см — диаметр основания цилиндра, $r = \frac{5}{2}$ см. $BB_1 = h = 12$ см — высота и образующая цилиндра.

Объем цилиндра $V_{цил} = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12 = 75\pi$ (см^3).

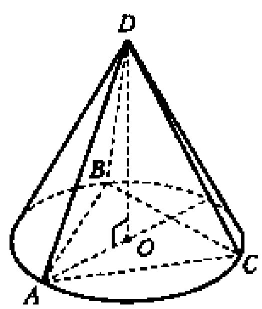
Площадь полной поверхности цилиндра

$S_{полн\ цил} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 12 + 2\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

$= 60\pi + 12{,}5\pi = 72{,}5\pi$ (см^2).

Ответ: $V_{цил} = 75\pi$ см^3, $S_{полн\ цил} = 72{,}5$ см^2.

№ 8. *В конус вписана правильная треугольная пирамида с площадью основания* $16\sqrt{3}$ *см*^{2} *и углом наклона бокового ребра к основанию, равным* $60°$. *Найдите объем и площадь полной поверхности конуса.*



Решение.

Пирамида называется вписанной в конус, если ее основание вписано в основание конуса, а вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Пусть $DABC$ — данная вписанная пирамида. В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник, все боковые ребра равны между собой и вершина проектируется в центр основания, который совпадает с центром основания описанного конуса. $\triangle ABC$ — равносторонний, $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$ см^2, $DO = H$ — высота пирамиды и конуса, $\angle DAO = 60°$ — угол наклона бокового ребра пирамиды.

Площадь равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$, $a^2 = 4 \cdot 16$, $a = 8$ (см) — сторона треугольника ABC. $AO = R$ — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Из формулы $a = R\sqrt{3}$ следует, что $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ (см). Из прямоугольного треугольника AOD отношение $\frac{DO}{AO} = \operatorname{tg}\angle DAO$, $\frac{H}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \operatorname{tg} 60°$, $H = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 8$ (см), образующая конуса $L = AD = 2AO = \frac{16}{\sqrt{3}}$ (см) как катет, лежащий против угла в $30°$. Объем конуса:

$V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 8 = \frac{64 \cdot 8}{9}\pi = \frac{512}{9}\pi = 56\frac{8}{9}\pi$ (см^3).

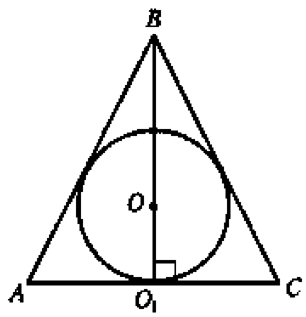
Площадь полной поверхности конуса:

$S_{полн\ кон} = S_{бок} + S_{осн} = \pi RL + \pi R^2 = \pi \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} + \pi \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 =$

$= \pi \cdot \frac{128}{3} + \pi \cdot \frac{64}{3} = \pi \cdot \frac{192}{3} = 64\pi$ (см^2).

Ответ: $V_{кон} = 56\frac{8}{9}\pi$ см^3, $S_{полн\ кон} = 64\pi$ см^2.

№ 9. *В конус с радиусом основания, равным 3 см, и высотой, равной 4 см, вписан шар. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади поверхности шара.*



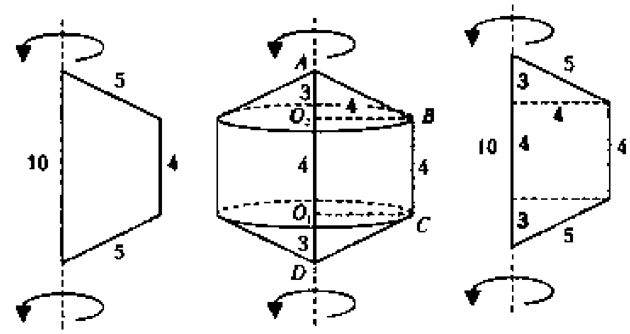
Решение.

Проведем осевое сечение конуса. В сечении получим равнобедренный треугольник ABC, в который вписан большой круг шара с центром O, лежащим на высоте BO_1 треугольника.

$AB = BC = l$ как образующие, $O_1C = 3$ см — радиус основания конуса. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{BO_1^2 + O_1C^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см). Для нахождения радиуса вписанного в $\triangle ABC$ круга воспользуемся формулой $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, S — его площадь. $p_{ABC} = BC + O_1C = 5 + 3 = 8$ (см), $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO_1 = O_1C \cdot BO_1 = 3 \cdot 4 =$ $= 12$ (см²). Радиус шара $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ (см). Площадь поверхности шара $S_ш = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$ (см²). Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок\ кон} = \pi \cdot O_1C \cdot l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$ (см²). Искомое отношение $\frac{S_{бок\ кон}}{S_ш} = \frac{15\pi}{9\pi} = \frac{5}{3}$.

Ответ: 5:3.

№ 10. *Равнобедренная трапеция с основаниями 4 см и 10 см и боковой стороной, равной 5 см, вращается вокруг большего основания. Найдите объем и площадь поверхности полученного тела вращения.*



Решение.

Тело вращения состоит из цилиндра и двух равных конусов, имеющих с цилиндром общие основания. Радиус цилиндра и радиус основания конуса равны высоте $h = CO_1 = BO_2$ трапеции. Высота цилиндра равна меньшей стороне трапеции, т. е. $h_{цил} = BC$. Высота конуса равна проекции боковой стороны трапеции на большее основание, т. е. $h_{кон} = AO_2 = DO_1$. Так как O_1O_2BC — прямоугольник, то $O_1O_2 = BC = 4$ см. Из равенства прямоугольных треугольников AO_2B и DO_1C (по гипотенузе и катету) следует, что $AO_2 = DO_1 = \frac{AD - O_1O_2}{2} = \frac{10-4}{2} = 3$ (см). Радиус цилиндра и оснований конусов $r = 4$ см. Объем цилиндра $V_{цил} = S_{осн}h = \pi r^2 h_{цил} =$ $= \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 64\pi$ (см³), объем конуса $V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3}\pi r^2 h_{кон} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 =$ $= 16\pi$ (см³). Объем тела вращения $V = V_{цил} + 2V_{кон} = 64\pi + 2 \cdot 16\pi = 96\pi$ (см³).

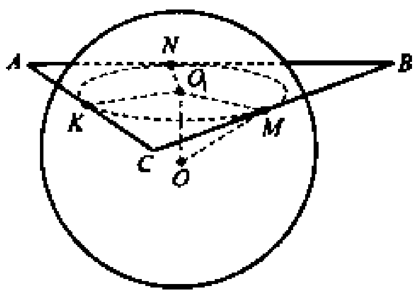
Площадь полной поверхности данного тела вращения

$S = S_{бок\ цил} + 2S_{бок\ кон} = 2\pi rh + 2 \cdot \pi rl = 2\pi r(h + l) = 2\pi \cdot 4(4 + 5) = 72\pi$ (см²).

Ответ: $V = 96\pi$ см³, $S = 72\pi$ см².

ПОДГОТОВКА К ЦТ

ЦТ 1. *Стороны треугольника, равные* 6, 8 *и* 10, *касаются шара, радиус которого равен* 3. *Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.*



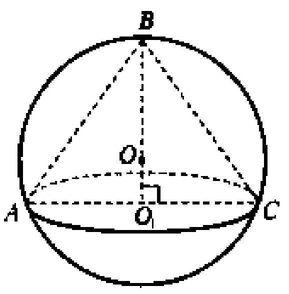
Решение.

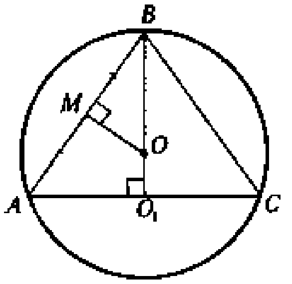
В сечении шара плоскостью треугольника получим круг, вписанный в треугольник. Докажем это. Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Радиусы OM, ON и OK, проведенные в точки касания сторон треугольника с поверхностью шара, перпендикулярны сторонам треугольника. По теореме о трех перпендикулярах $O_1M \perp BC, O_1N \perp AB, O_1K \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OO_1M, OO_1N и OO_1K следует, что O_1 — центр вписанной окружности треугольника ABC, а отрезки O_1M, O_1N, O_1K — ее радиусы.

Так как $6^2+8^2=10^2$, то данный треугольник — прямоугольный, радиус вписанной окружности $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{6+8-10}{2}=2$. По теореме Пифагора искомое расстояние $OO_1=\sqrt{ON^2-O_1N^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

ЦТ 2. *Шар радиуса* 6 *описан около конуса. Высота конуса равна* 8. *Найдите площадь боковой поверхности конуса.*





Решение.

Пусть O_1 — центр основания конуса, O — центр описанного шара, который лежит на высоте BO_1 конуса. Проведя секущую плоскость через ось конуса, получим в сечении большой круг шара и вписанный в него равнобедренный треугольник ABC — осевое сечение конуса, где $AB=BC=l$ как образующие конуса, $r=O_1C$ — радиус основания конуса. Центр O описанного круга лежит на высоте BO_1 треугольника.

Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок}=\pi rl$.

Радиус R окружности, описанной около треугольника ABC, равен радиусу шара, описанного около конуса. Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров MO и BO_1 к сторонам треугольника ABC. $BO=6$, $BO_1=8$. Из подобия прямоугольных треугольников BMO и BO_1A (по острому углу) $\dfrac{BM}{BO}=\dfrac{BO_1}{AB}$; $\dfrac{BM}{6}=\dfrac{8}{2BM}$; $BM=\sqrt{24}$, $AB=2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$.

Из $\triangle BO_1A$ $AO_1=\sqrt{AB^2-BO_1^2}=\sqrt{4\cdot24-64}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

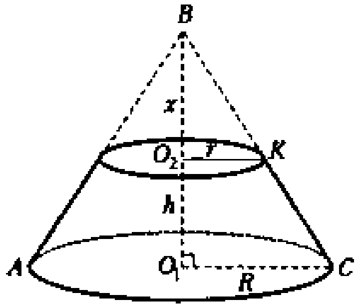
Радиус конуса $AO_1=r=4\sqrt{2}$, $AB=l=4\sqrt{6}$.

Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок}=\pi rl=\pi\cdot4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{6}=32\sqrt{3}\pi$.

Ответ: $32\sqrt{3}\pi$.

__Замечание.__ **При решении задач на комбинацию тел вращения часто полезно рассмотреть осевое сечение и свести задачу к планиметрической.**

ЦТ 3. ***Дан усеченный конус с радиусами оснований, равными 2 и 4, и высотой 3. Найдите объем усеченного конуса. Округлите ответ до целых.***



Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть $O_1C = R$, $O_2K = r$ – радиусы оснований, $O_1O_2 = h$ – высота усеченного конуса. Достроим усеченный конус до полного конуса. Обозначим высоту отсеченной части – малого конуса – $BO_2 = x$. Из подобия прямоугольных треугольников BO_2K и BO_1C получим $\frac{x}{x+h} = \frac{r}{R}$, откуда $xR = xr + rh$, $x(R-r) = rh$, $x = \frac{rh}{R-r}$.

Высота большого конуса с сечением ABC

$BO_1 = x + h = \frac{rh}{R-r} + h = \frac{rh + Rh - rh}{R-r} = \frac{Rh}{R-r}$.

Объем большого конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot BO_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{Rh}{R-h}$. Объем малого конуса $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot BO_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{rh}{R-h}$.

Объем усеченного конуса $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{Rh}{R-h} - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{rh}{R-h} = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-h} = \frac{1}{3}\pi h \times$

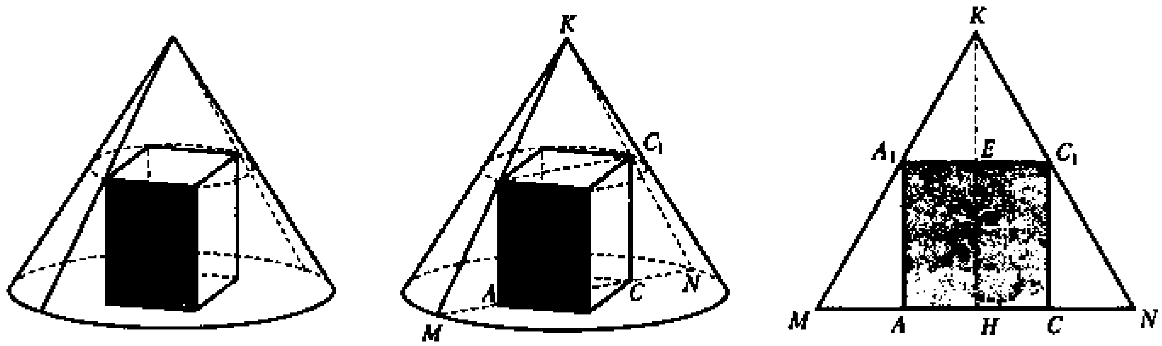
$\times \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-h} = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$. Для нашей задачи $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 28\pi \approx 81$ (ед^3).

Ответ: 81 ед^3.

Замечание. Формулу объема усеченного конуса можно записать через площади оснований:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}h \cdot (\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2) = \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}$$

ЦТ 4. ***В равносторонний конус с радиусом основания, равным 4, вписан прямоугольный параллелепипед с высотой $\sqrt{3}$ так, что одно его основание принадлежит основанию конуса, а вершины другого основания принадлежат боковой поверхности конуса. Найдите объем V параллелепипеда. В ответе запишите значение $V\sqrt{3}$.***



Решение. Проведем осевое сечение конуса, проходящее через диагональ основания параллелепипеда. В сечении получим равносторонний треугольник MKN – осевое сечение конуса – и вписанный в него прямоугольник AA_1C_1C – диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда. $MN = 2r = 8$ – диаметр основания конуса. Проведем высоту $KH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $EH = AA_1 = \sqrt{3}$ – высота прямоугольного параллелепипеда, $KE = KH - EH = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Пусть ребро основания прямоугольного параллелепипеда равна x. Диагональ основания $AC = A_1C_1 = x\sqrt{2}$. Так как $A_1C_1 \parallel MN$, то треугольники A_1KC_1 и MKN подобны. Из подобия треугольников $\frac{A_1C_1}{MN} = \frac{KE}{KH}$, т. е. $\frac{x\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$, $x = \frac{6}{\sqrt{2}}$. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot h = x^2 \cdot h = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 18\sqrt{3}$; $V\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 54$.

Ответ: 54.

Ответы на простые и непростые вопросы

1. Окружность.
2. Круг.
3. Прямоугольник.
4. Равносторонний цилиндр.
5. Равнобедренный треугольник.
6. Да.
7. Равносторонний конус.
8. Трапеция.
9. Объем конуса.
10. 1 см. Если $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3}$, то $r = 1$ (см).
11. 3 см. Если $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$, то $r^3 = 27$, $r = 3$ (см) — искомое расстояние.
12. 24. $S_{бок\ кон} = \pi rl = 3\cdot 2\cdot 4 = 24$.
13. 44π. $S_{полн\ цил} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\cdot 12\pi + 20\pi = 44\pi$.
14. 8π.
15. 4. $S_{бок\ кон} = \pi rl = \pi\cdot r\cdot 5 = 15\pi$, $r = 3$, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
16. В 4 раза. $S_{ш} = 4\cdot\pi r^2$, $S_{кр} = \pi r^2$.
17. В 4 раза. $S_{данной\ сф} = 4\pi r^2$, $S_{новой\ сф} = 4\pi(2r)^2 = 16\pi r^2$.
18. В 8 раз. $V_{данного\ ш} = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_{нового\ ш} = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 8r^3$.
19. Как $\frac{3}{2}$. $\frac{V_{цил}}{V_{вп\ ш}} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi r^2\cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$.
20. $\frac{1}{4}$. $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$.
21. 16π см^3. $S_{сеч} = d\cdot h = 2r\cdot 2r = 4r^2 = 16$, $r = 2$ (см), $h = 2r = 4$ (см), $V_{цил} = \pi r^2 h = \pi\cdot 2^2\cdot 4 = 16\pi$ (см^3).
22. Радиус основания конуса больше радиуса основания цилиндра. $V_{цил} = \pi r_{цил}^2\cdot h_{цил} = \pi r_{цил}^2\cdot 2r_{цил} = 2\pi r_{цил}^3$, $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi r_{кон}^2\cdot h_{кон} = \frac{1}{3}\pi r_{кон}^2\cdot\frac{2r_{кон}\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi r_{кон}^3}{\sqrt{3}}$. Так как $2\pi r_{цил}^3 = \frac{\pi r_{кон}^3}{\sqrt{3}}$, $r_{кон}^3 = 2\sqrt{3}\cdot r_{цил}^3$, то $r_{кон} > r_{цил}$.
23. Высота конуса больше. $V_{цил} = \pi r^2\cdot h_{цил}$, $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h_{кон}$. Так как $\pi r^2\cdot h_{цил} = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h_{кон}$, то $h_{цил} = \frac{1}{3}h_{кон}$, откуда $h_{цил} < h_{кон}$.
24. Уменьшится в 2 раза. $V_{старого\ цил} = \pi r^2 h$, $V_{нового\ цил} = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 2h = \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{V_{старого\ цил}}{2}$.
25. Увеличится в 2 раза. $V_{старого\ кон} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $V_{старого\ кон} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\cdot\frac{h}{2} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.
26. Как $\sqrt{2}:2$. Проведя осевое сечение цилиндра, получим, что искомое отношение равно отношению диаметров вписанного в квадрат круга и описанного около этого квадрата круга, т. е. $\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
27. Как $\sqrt{3}:3$. Диаметр вписанного шара равен a, радиус — $r = \frac{a}{2}$, диаметр описанного шара равен диагонали куба, т. е. $a\sqrt{3}$, а радиус описанного шара — $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
28. Как квадраты радиусов оснований: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2\cdot h}{\frac{1}{3}\pi r_2^2\cdot h} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

29. Как высоты. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h_1}{\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h_2}=\frac{h_1}{h_2}$.

30. Как 9 : 32. Если r — радиус основания конуса, то $a=2r$ — сторона осевого сечения конуса, $h=2r\frac{\sqrt{3}}{2}$ — высота конуса. $R=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{2r}{\sqrt{3}}$ — радиус описанного шара. $\frac{V_{кон}}{V_ш}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{2r\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\pi r^3}{\frac{32}{9\sqrt{3}}\pi\cdot r^3}=\frac{9}{32}$.

31. $\frac{P-T}{2}$.

32. $\frac{3G}{Q}$.

33. $4Q$.

34. 9π.

35. 36π. Так как $16\pi+20\pi=\frac{4}{3}\pi R^3$, то $R^3=27$, $R=3$; $S_ш=4\pi R^2=4\pi\cdot 3^2=36\pi$.

36. 4.

ЭТО НУЖНО ЗНАТЬ!

Объем шара $\boxed{V_{шара}=\frac{4}{3}\pi R^3}$

Площадь сферы (площадь поверхности шара) $\boxed{S_{сферы}=4\pi R^2}$

Объем цилиндра $\boxed{V_{цил}=S_{осн}\cdot h=\pi R^2 h}$

Площадь боковой поверхности цилиндра $\boxed{S_{бок\ цил}=2\pi Rh}$

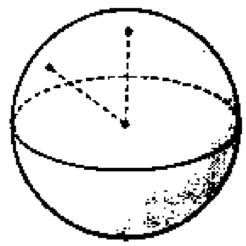
Объем конуса $\boxed{V_{кон}=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\pi R^2 h}$

Площадь боковой поверхности конуса $\boxed{S_{бок\ кон}=\pi Rl}$

Объем усеченного конуса $\boxed{V_{ус\ кон}=\frac{1}{3}h\cdot\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)}$

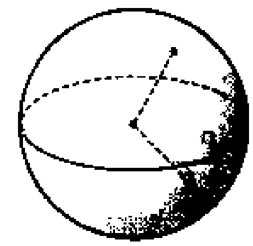
Задачи по теме «Тела вращения»

1 Из центра сферы с диаметром 18 провели два радиуса, угол между которыми 60°. Найдите расстояние между концами радиусов, лежащих на сфере.



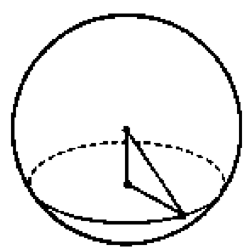
Ответ:

2 Из центра сферы провели два радиуса, угол между которыми 90°. Расстояние между концами радиусов равно $4\sqrt{2}$. Найдите диаметр сферы.



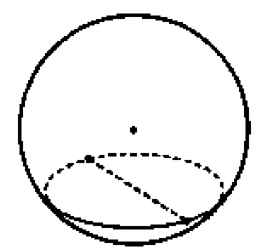
Ответ:

3 Диаметр шара равен 26, расстояние от центра шара до его сечения равно 5. Найдите радиус данного шарового сечения.



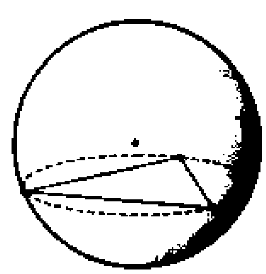
Ответ:

4 Диаметр сечения шара равен 8, расстояние от центра шара до его сечения равно 3. Найдите радиус шара.



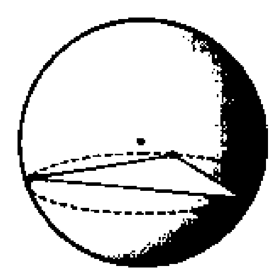
Ответ:

5 В сечение шара вписан равносторонний треугольник со стороной 6. Расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 2. Найдите радиус шара.



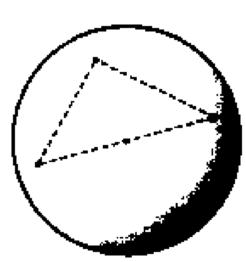
Ответ:

6 В сечение шара вписан треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Радиус шара равен $\sqrt{29}$. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.



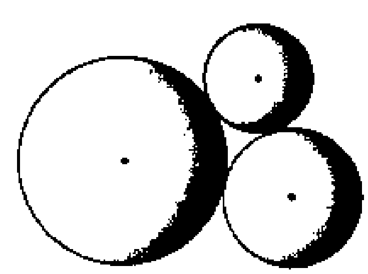
Ответ:

7 Расстояния от концов диаметра шара до точки, лежащей на его поверхности, равны 12 и 16. Найдите радиус шара.



Ответ:

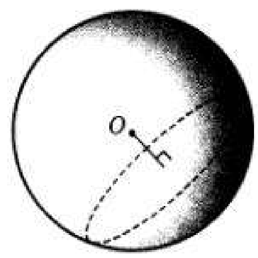
8 Три шара с радиусами 1, 2 и 3 касаются друг друга. Найдите площадь треугольника, образованного центрами шаров сферы.



Ответ:

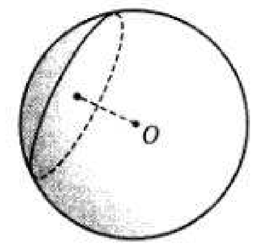
Шар, сфера и их сечения

9 На расстоянии 5 от центра шара проведена плоскость. Площадь полученного сечения равна 144π. Найдите радиус шара.



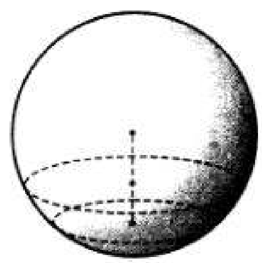
Ответ:

10 В шаре с радиусом 10 проведено сечение площадью 64π. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.



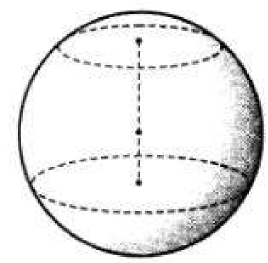
Ответ:

11 По одну сторону от центра шара с радиусом 15 проведены два параллельных сечения с радиусами 9 и 12. Найдите расстояние между сечениями.



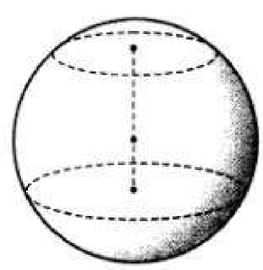
Ответ:

12 По разные стороны от центра шара с радиусом 5 проведены два параллельных сечения с радиусами 3 и 4. Найдите расстояние между сечениями.



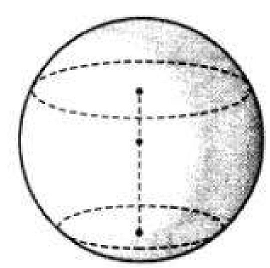
Ответ:

13 На расстоянии 7 и 15 от центра шара проведены два параллельных сечения, радиусы которых относятся как 6 : 5. Найдите радиус шара.



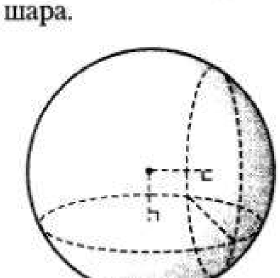
Ответ:

14 По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения с площадью 9π и 16π. Расстояние между сечениями равно 7. Найдите радиус шара.



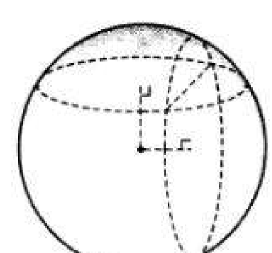
Ответ:

15 На расстояниях 6 и 8 от центра шара проведены два взаимно перпендикулярных сечения. Общая хорда сечений равна 12. Найдите площадь большого круга шара.



Ответ:

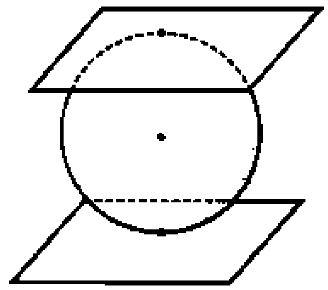
16 На расстояниях 4 и 3 от центра шара с радиусом $\sqrt{34}$ проведены два взаимно перпендикулярных сечения. Найдите длину общей хорды сечений.



Ответ:

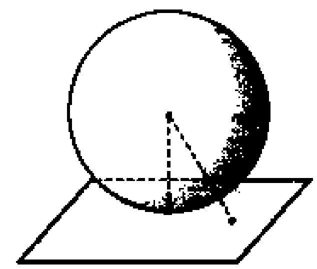
Касательные прямые и плоскости к сфере

(17) Сфера с радиусом 6 касается двух параллельных плоскостей. Найдите расстояние между плоскостями.



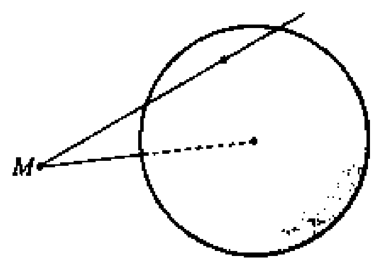
Ответ:

(18) Расстояние от центра шара с диаметром 40 до точки M на касательной плоскости равно 25. Найдите длину проекции отрезка OM на касательную плоскость.



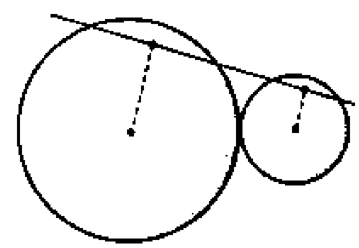
Ответ:

(19) Расстояние от точки M до центра O сферы с радиусом 7 равно 25. Найдите расстояние от данной точки до точки A касания прямой MA и сферы.



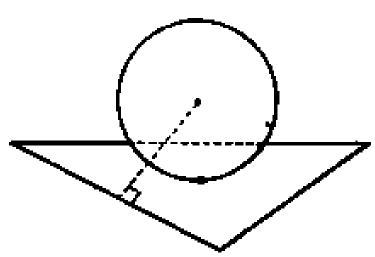
Ответ:

(20) Две сферы с радиусами 9 и 4 касаются друг друга. К сферам проведена общая касательная. Найдите расстояния между точками касания.



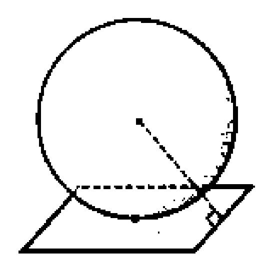
Ответ:

(21) Сфера касается плоскости равностороннего треугольника с высотой 12 в его центре. Расстояние от центра сферы до стороны треугольника равно 5. Найдите радиус сферы.



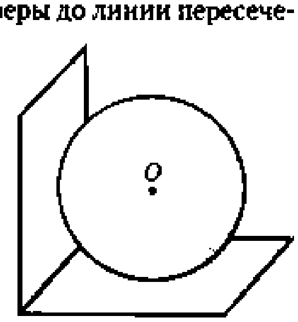
Ответ:

(22) Сфера с диаметром 16 касается квадрата со стороной 12 в его центре. Найдите расстояние от центра сферы до стороны квадрата.



Ответ:

(23) Сфера с радиусом $\sqrt{18}$ касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей.



Ответ:

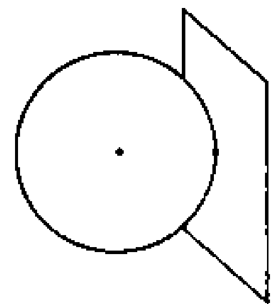
(24) Сфера касается сторон двугранного угла, равного 60°. Расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно 24. Найдите диаметр сферы.

Ответ:

Вписанные и описанные шары

25 Диаметр шара 18. Плоскость, касающаяся шара, находится на расстоянии от центра шара, равном:

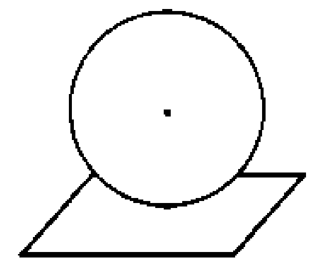
1) 6;
2) 9;
3) 12;
4) 36.



Ответ:

26 Шар лежит на плоскости, его центр находится на расстоянии 6 от данной плоскости. Диаметр шара равен:

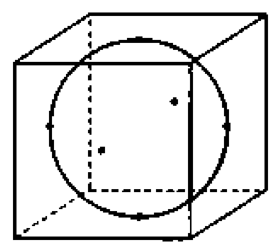
1) 3;
2) 6;
3) 12;
4) 24.



Ответ:

27 В куб с ребром, равным 6, вписан шар. Объем шара равен:

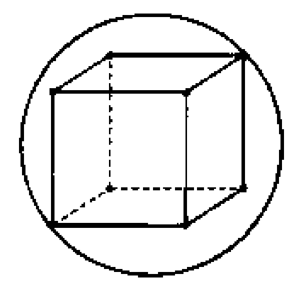
1) 36π;
2) 108π;
3) 108π;
4) 324π.



Ответ:

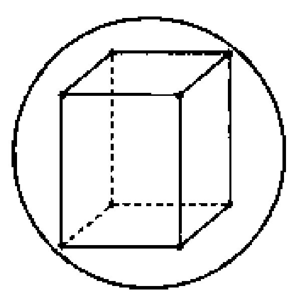
28 Около куба с ребром, равным $\sqrt{3}$, описан шар. Объем шара равен:

1) 36π;
2) 9π;
3) 36;
4) 108π.



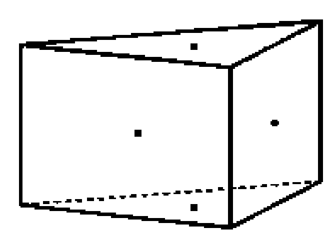
Ответ:

29 Найдите радиус шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2, $\sqrt{11}$ и 1.



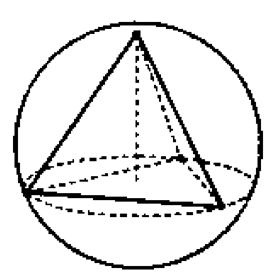
Ответ:

30 В правильную треугольную призму со стороной основания, равной $2\sqrt{3}$, вписан шар. Найдите высоту призмы.



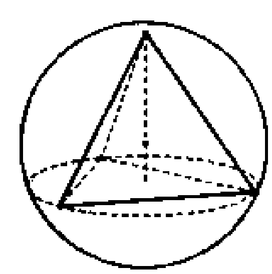
Ответ:

31 В шар с радиусом 5 вписана правильная треугольная пирамида с высотой 8. Найдите радиус сечения шара плоскостью, проходящей через основание пирамиды.



Ответ:

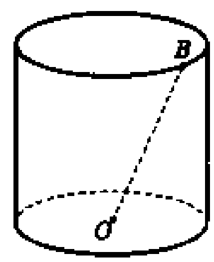
32 В шар с радиусом 13 вписана правильная треугольная пирамида. Радиус сечения шара плоскостью, проходящей через основание пирамиды, равен 12. Найдите высоту пирамиды.



Ответ:

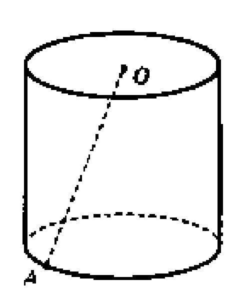
Цилиндр и площадь его боковой поверхности

(33) Образующая цилиндра равна 12, расстояние от точки B до центра нижнего основания равно 13. Найдите диаметр цилиндра.



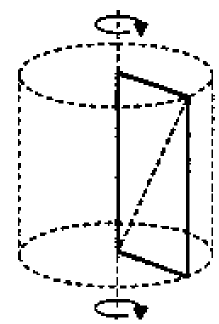
Ответ:

(34) Диаметр цилиндра равен 16, $AO = 17$. Найдите высоту цилиндра.



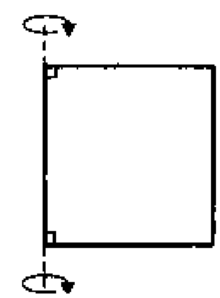
Ответ:

(35) Прямоугольник с диагональю 12 вращают вокруг одной из сторон, другая сторона составляет с этой диагональю угол 60°. Найдите площадь основания полученного тела вращения.



Ответ:

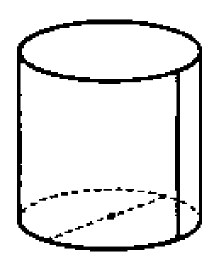
(36) Квадрат с площадью, равной 36, вращают вокруг одной из сторон. Найдите сумму высоты и диаметра основания полученного тела вращения: $h + d$.



Ответ:

(37) Высота и диаметр основания цилиндра равны 10. Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

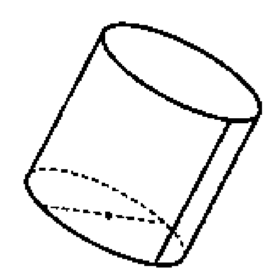
1) 25π;
2) 100π;
3) 250π;
4) 50π.



Ответ:

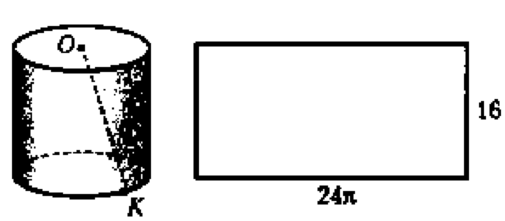
(38) Радиус основания цилиндра равен 4, площадь его боковой поверхности — 80π. Высота цилиндра равна:

1) 5;
2) 8;
3) 10;
4) 12.



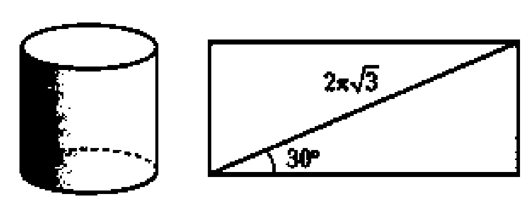
Ответ:

(39) Длина развертки боковой поверхности цилиндра равна 24π, высота — 16. Найдите OK.



Ответ:

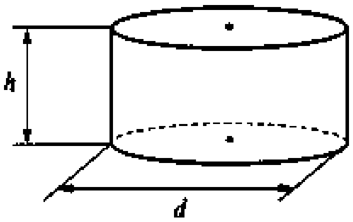
(40) Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра составляет с основанием угол 30° и равна $2\pi\sqrt{3}$. Найдите диаметр основания цилиндра.



Ответ:

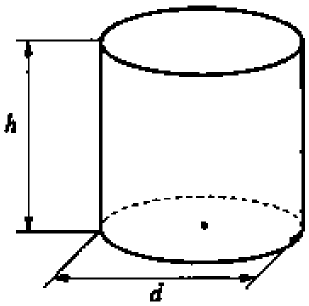
Сечения цилиндра

41 Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания. Найдите отношение высоты h цилиндра к его диаметру d.



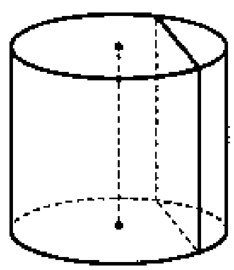
Ответ:

42 Высота h цилиндра равна его диаметру d. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади его основания.



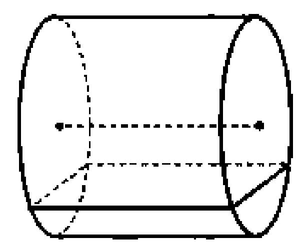
Ответ:

43 Высота цилиндра равна 12 см, площадь боковой поверхности — 120π см^2. Вычислите площадь сечения, параллельного оси и отстоящего от нее на расстоянии 4 см.



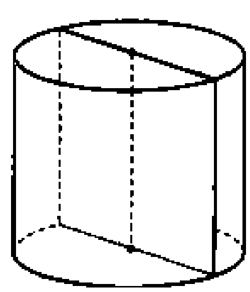
Ответ:

44 Площадь осевого сечения цилиндра равна 80 см^2, площадь его основания — 25π см^2. Вычислите площадь сечения, параллельного оси и отстоящего от нее на расстоянии 3 см.



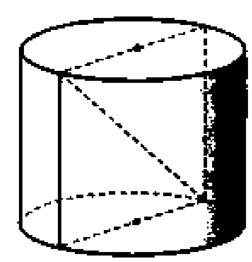
Ответ:

45 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если его осевым сечением является квадрат.



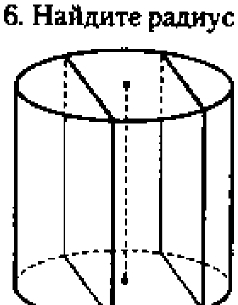
Ответ:

46 Длина окружности основания цилиндра равна 8π, диагональ осевого сечения — 10. Найдите площадь его полной поверхности.



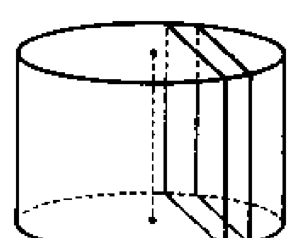
Ответ:

47 Площади параллельных сечений цилиндра, находящихся по разные стороны от его оси, равны 48 и 36, расстояние между сечениями равно 7. Высота цилиндра — 6. Найдите радиус основания цилиндра.



Ответ:

48 Площади параллельных сечений цилиндра, находящихся по одну сторону от его оси, равны 120 и 160. Радиус и высота цилиндра равны 10. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

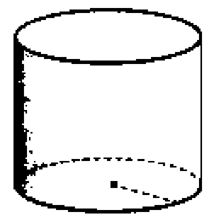


Ответ:

Объем цилиндра

49 Радиус основания цилиндра равен 6, высота — 10. Объем цилиндра равен:

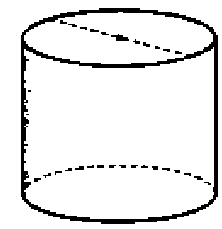
1) 480π;
2) 120π;
3) 640π;
4) 360π.



Ответ:

50 Диаметр цилиндра равен 10, образующая — 6. Объем цилиндра равен:

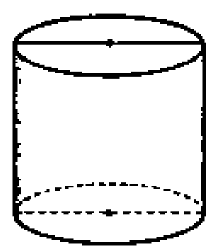
1) 160π;
2) 150π;
3) 300π;
4) 600π.



Ответ:

51 Осевое сечение цилиндра — квадрат с периметром 24. Объем цилиндра равен:

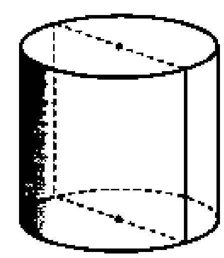
1) 54π;
2) 128π;
3) 64π;
4) 72π.



Ответ:

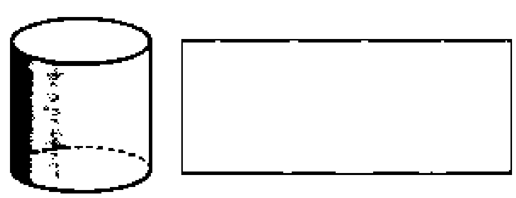
52 Объем цилиндра равен 72π, высота цилиндра – 8. Периметр осевого сечения равен:

1) 26;
2) 24;
3) 28;
4) 34.



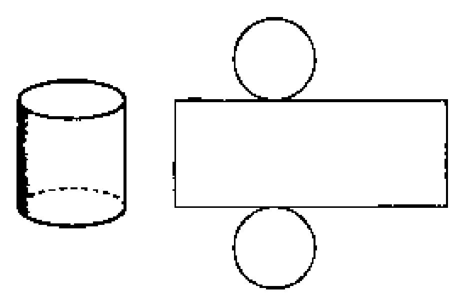
Ответ:

53 Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 30π, высота цилиндра — 5. Найдите объем цилиндра.



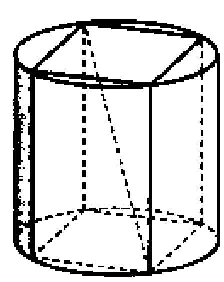
Ответ:

54 Высота цилиндра равна 3, объем — 12π. Найдите площадь развертки всей поверхности цилиндра.



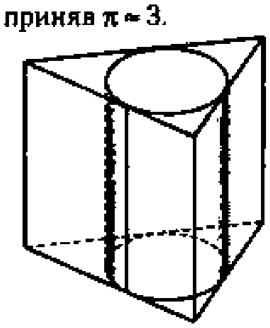
Ответ:

55 В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма со стороной основания, равной 2, и диагональю, равной $\sqrt{44}$. Найдите объем цилиндра, приняв $\pi \approx 3$.



Ответ:

56 Цилиндр вписан в правильную треугольную призму со стороной основания, равной 6, и площадью боковой поверхности, равной 90. Найдите объем цилиндра, приняв $\pi \approx 3$.

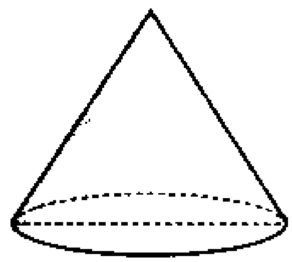


Ответ:

Конус

57 Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник с периметром 24. Длина образующей конуса равна:

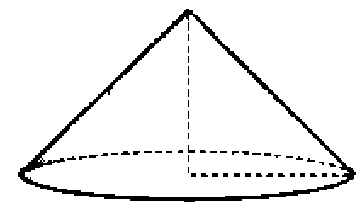
1) 8;
2) 12;
3) 6;
4) 4.



Ответ:

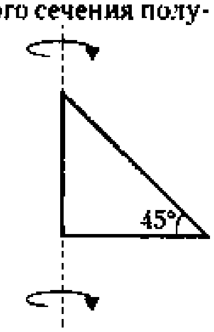
58 Образующая конуса наклонена к основанию под углом 45°. Высота конуса равна 6. Площадь основания конуса равна:

1) 12π;
2) 24π;
3) 36π;
4) $12\sqrt{2}\pi$.



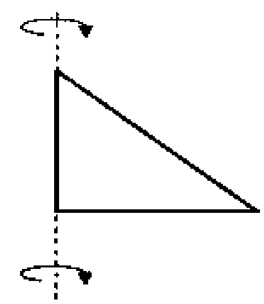
Ответ:

59 Прямоугольный треугольник с гипотенузой $3\sqrt{2}$ и острым углом 45° вращают вокруг катета. Найдите площадь осевого сечения полученного тела вращения.



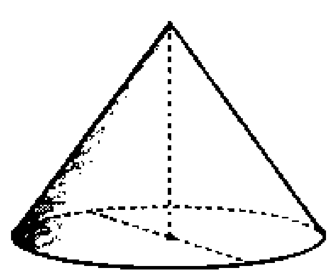
Ответ:

60 Прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 6 вращают вокруг меньшего катета. Найдите периметр осевого сечения полученного тела вращения.



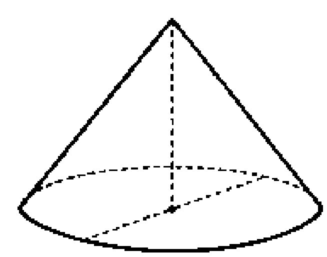
Ответ:

61 Диаметр основания конуса равен 16, а высота — 15. Найдите образующую конуса.



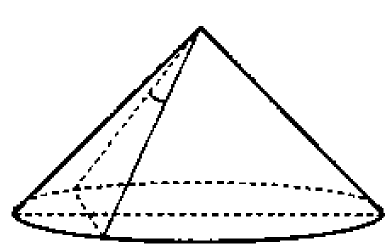
Ответ:

62 Образующая конуса равна 10, а диаметр основания — 16. Найдите высоту конуса.



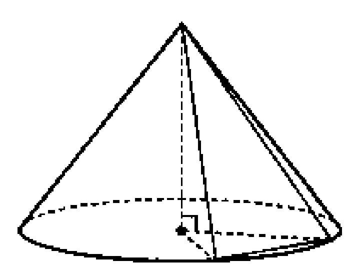
Ответ:

63* Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с площадью 16. Найдите площадь сечения конуса, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 30°.



Ответ:

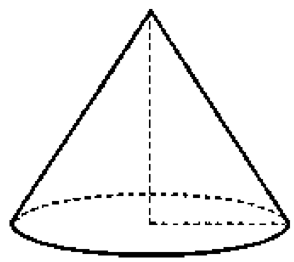
64* Высота конуса равна 8, радиус основания — 6. Сечение конуса проходит через две образующие конуса и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Площадь этого сечения $S = \sqrt{x}$. Найдите x.



Ответ:

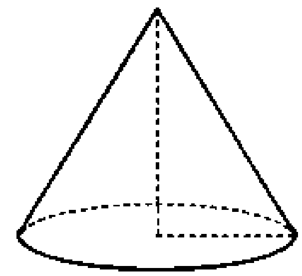
Конус

65 Площадь основания конуса равна 18, высота — 10. Найдите объем конуса.



Ответ:

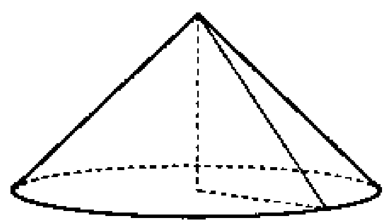
66 Объем конуса равен 120, высота конуса — 15. Найдите площадь основания конуса.



Ответ:

67 Объем конуса равен 16π, высота конуса — 4. Диаметр основания конуса равен:

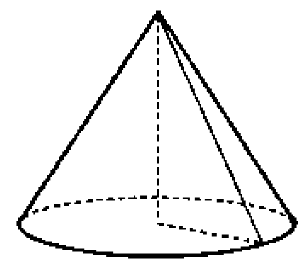
1) 12;
2) $\sqrt{12}$;
3) $2\sqrt{12}$;
4) 4.



Ответ:

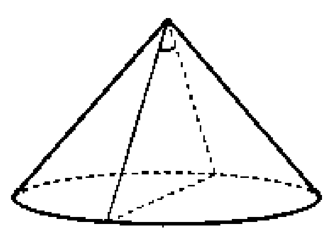
68 Диаметр основания конуса и высота конуса равны 6. Объем конуса равен:

1) 12π;
2) 18π;
3) 24π;
4) 36π.



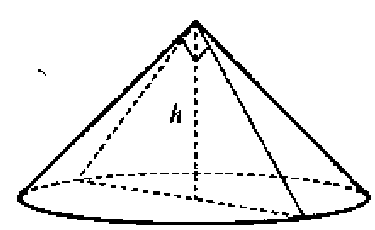
Ответ:

69 Радиус основания конуса равен 6, объем конуса — 72π. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.



Ответ:

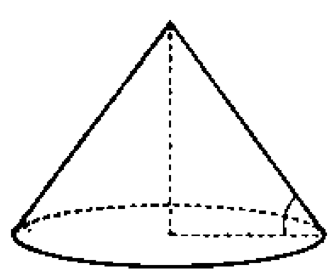
70 Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с радиусом описанной окружности, равным 6. Найдите объем конуса.



Ответ:

71 Образующая конуса равна 6, угол наклона ее к основанию — 60°. Объем конуса равен:

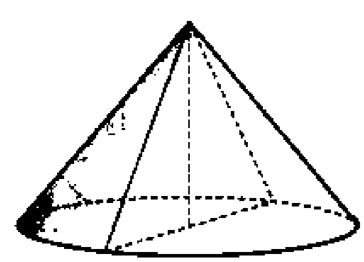
1) 243π;
2) $27\sqrt{3}\pi$;
3) $9\sqrt{3}\pi$;
4) 54π.



Ответ:

72 Осевым сечением конуса является треугольник со сторонами 5, 5 и 6. Объем конуса равен:

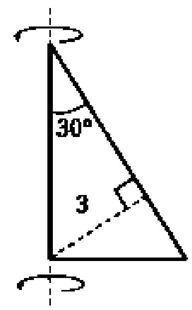
1) 64π;
2) $16\sqrt{3}\pi$;
3) 16π;
4) 12π.



Ответ:

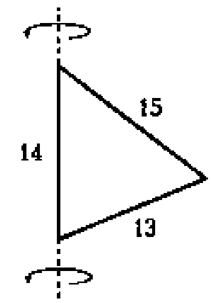
Конус

73* Прямоугольный треугольник с высотой 3 и острым углом 30° вращается вокруг большего катета. Объем полученного тела вращения равен $x\pi$. Найдите x.



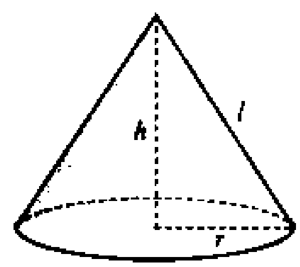
Ответ:

74* Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 вращается вокруг стороны длиной 14. Объем полученного тела вращения равен $x\pi$. Найдите x.



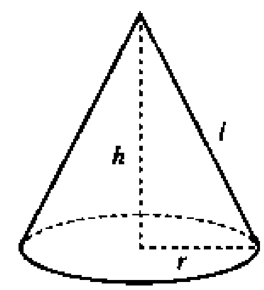
Ответ:

75 Площадь боковой поверхности конуса равна 15π, площадь основания — 9π. Найдите объем конуса.



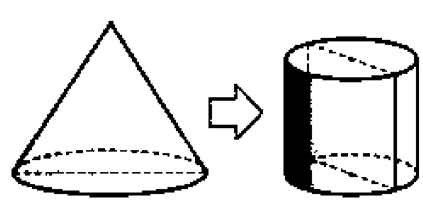
Ответ:

76 Объем конуса равен 100π, площадь основания — 25π. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



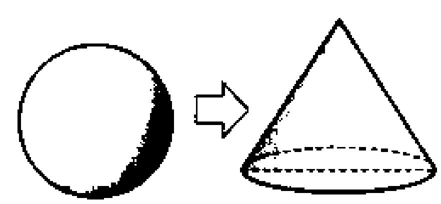
Ответ:

77* Равносторонний конус с образующей, равной $4\sqrt{3}$, переплавили в равносторонний цилиндр с радиусом основания r. Найдите r^3.



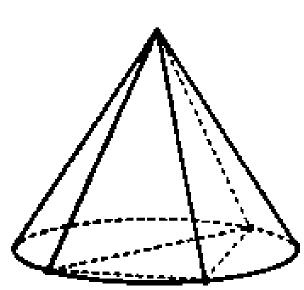
Ответ:

78* Металлический шар с радиусом $\sqrt{3}$ переплавили в равносторонний конус с образующей l. Найдите l^3.



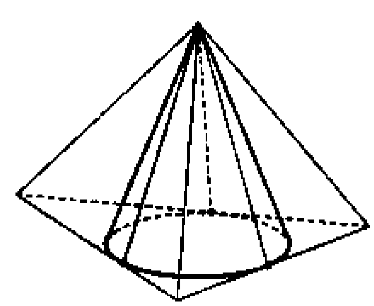
Ответ:

79 В конус вписана треугольная пирамида с высотой 9 и сторонами основания 6, 8 и 10. Найдите объем конуса.



Ответ:

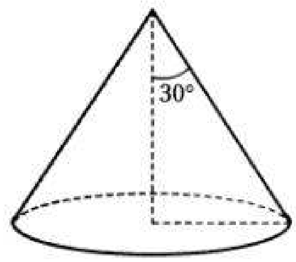
80 Около конуса описана треугольная пирамида с высотой 6 и сторонами основания 3, 4 и 5. Найдите объем конуса.



Ответ:

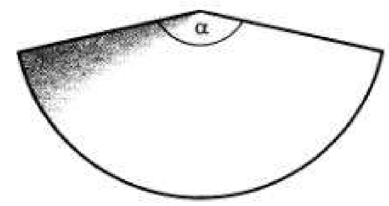
Усеченный конус

81* Угол между высотой и образующей конуса равен 30°. Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.



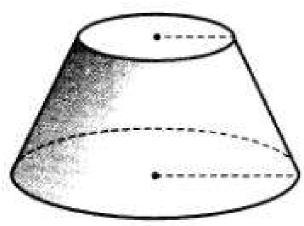
Ответ:

82* Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120°. Синус угла между высотой и образующей конуса равен $\frac{1}{x}$. Найдите x.



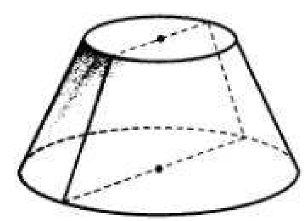
Ответ:

83 Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 4, образующая — 5. Найдите периметр осевого сечения.



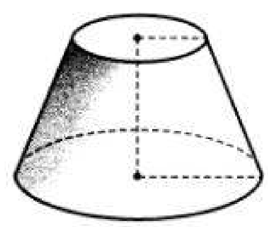
Ответ:

84 Периметр осевого сечения усеченного конуса равен 180, радиусы оснований равны 20 и 30. Найдите длину образующей усеченного конуса.



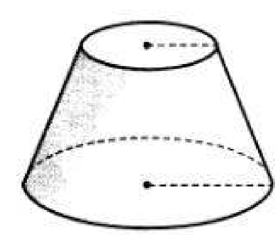
Ответ:

85 Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 7, образующая — 13. Найдите высоту усеченного конуса.



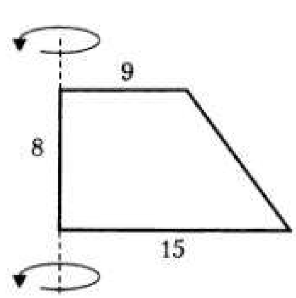
Ответ:

86 Площадь осевого сечения усеченного конуса с радиусами оснований 4 и 10 равна 112. Найдите длину образующей конуса.



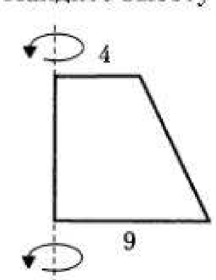
Ответ:

87 Прямоугольную трапецию с основаниями 9 и 15 вращают вокруг меньшей боковой стороны, равной 8. Найдите площадь боковой поверхности тела вращения.



Ответ:

88 Прямоугольную трапецию с основаниями 4 и 9 вращают вокруг меньшей боковой стороны. Площадь боковой поверхности полученного тела вращения $S_{бок} = 169\pi$. Найдите высоту трапеции.

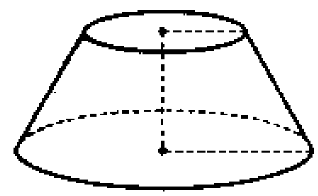


Ответ:

Усеченный конус

89 Площади оснований усеченного конуса равны 4π и 16π, его высота — 3. По формуле $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)h$ найдите объем конуса:

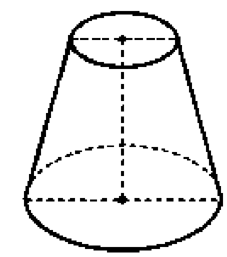
1) 28π;
2) 84π;
3) 16π;
4) 36π.



Ответ:

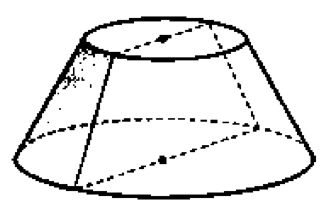
90 Диаметры оснований усеченного конуса равны 4 и 6, его высота — 6. По формуле $V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + Rr + r^2\right)h$ найдите объем конуса:

1) 28π;
2) 38π;
3) 114π;
4) 28π.



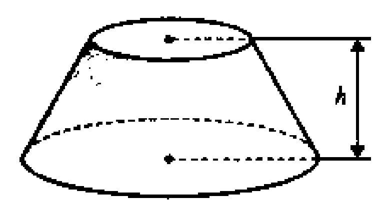
Ответ:

91 Осевое сечение усеченного конуса — трапеция с основаниями 4 и 10 и боковой стороной 5. Найдите объем усеченного конуса.



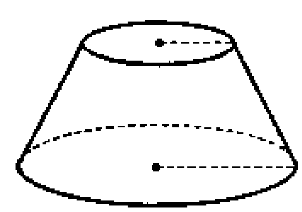
Ответ:

92 Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6, объем конуса — 84π. Найдите высоту данного конуса.



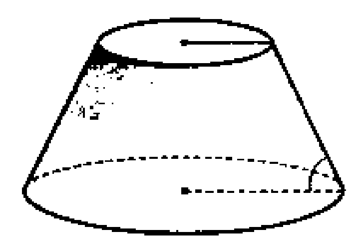
Ответ:

93* Радиусы оснований конуса равны 3 и 5, образующая конуса — $\sqrt{20}$. Найдите объем усеченного конуса, приняв $\pi = 3$.



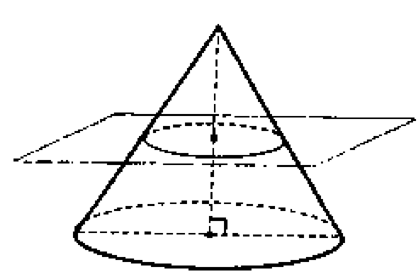
Ответ:

94* Сумма радиусов оснований конуса равна 5, образующая равна 6 и составляет с плоскостью основания угол 60°. Объем усеченного конуса равен $x\sqrt{3}\pi$. Найдите x.



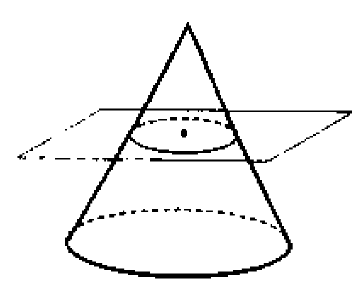
Ответ:

95 Радиус основания конуса равен 3, высота — 8. Через середину высоты перпендикулярно ей провели сечение параллельно основанию. Найдите объем полученного усеченного конуса.



Ответ:

96 Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус высотой 6 см, объем которого в 27 раз меньше объема данного конуса. Найдите высоту конуса.



Ответ:

Контрольная работа по теме «Тела вращения»

<table>
<tr><th>Вариант 1</th><th>Вариант 2</th></tr>
<tr><td>

(1) Какое из следующих выражений позволяет найти площадь боковой поверхности цилиндра?

1) $\pi r^2 h$;
2) πrl;
3) $\pi r^2 + 2\pi rh$;
4) $2\pi rh$.

Ответ:

</td><td>

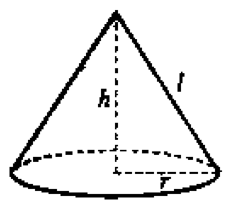
(1) Какое из следующих выражений позволяет найти площадь боковой поверхности конуса?

1) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$;
2) πrl;
3) $\pi r^2 + \pi rl$;
4) $2\pi rh$.

Ответ:

</td></tr>
<tr><td>

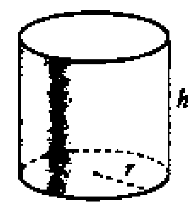
(2) Найдите площадь полной поверхности конуса с радиусом основания, равным 3 см, и образующей, равной 4 см.



Ответ:

</td><td>

(2) Найдите площадь полной поверхности цилиндра с радиусом основания, равным 4 см, и образующей, равной 5 см.



Ответ:

</td></tr>
<tr><td>

(3) Диаметр сечения шара плоскостью равен 24 см. Расстояние от центра шара до плоскости сечения равно 9 см. Найдите объем шара.

Ответ:

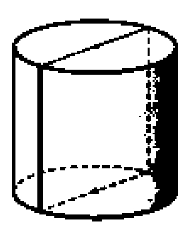
</td><td>

(3) Площадь поверхности шара равна 100π см^2. На расстоянии 3 см от центра шара проведена секущая плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

Ответ:

</td></tr>
<tr><td>

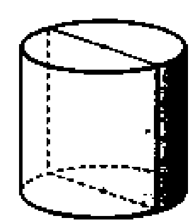
(4) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 91π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.



Ответ:

</td><td>

(4) Осевое сечение цилиндра — квадрат с площадью 173. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Ответ:

</td></tr>
<tr><td>

(5) Радиус основания конуса равен 4 см, угол наклона образующей конуса к основанию равен 30°. Найдите радиус шара, описанного около конуса.

Ответ:

</td><td>

(5) Образующая конуса равна 6 см, угол наклона образующей конуса к основанию равен 45°. Найдите радиус шара, вписанного в конус.

Ответ:

</td></tr>
</table>

ТЕМА 4

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ШАРЫ (СФЕРЫ)

ПОДГОТОВКА К ЦТ
(факультатив)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Шар** называется **описанным около многогранника**, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.

1. ПИРАМИДА И ОПИСАННЫЙ ШАР (СФЕРА)

Свойство 1. Около любой треугольной пирамиды (тетраэдра) можно описать шар (сферу).

Свойство 2. Около произвольной n-угольной пирамиды можно описать шар, если около ее основания можно описать окружность и наоборот.

Свойство 3. Центр шара, описанного около пирамиды, лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр окружности, описанной около основания.

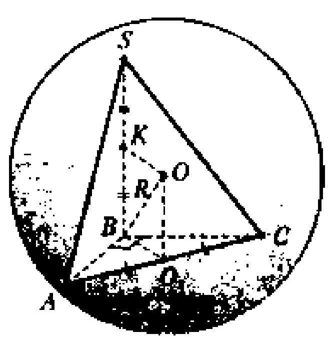
Свойство 4. Около произвольной n-угольной пирамиды можно описать шар, если ее боковые ребра равны.

Свойство 5. Около произвольной n-угольной пирамиды можно описать шар, если ее боковые ребра равно наклонены к основанию.

Свойство 6. Около любой правильной пирамиды (четырехугольной, пятиугольной и т. д.) можно описать шар. Центр этого шара лежит на высоте пирамиды или ее продолжении.

Свойство 7. Центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на пересечении высоты пирамиды (или ее продолжения) и серединного перпендикуляра к боковому ребру пирамиды, проведенного в плоскости, образованной этим ребром и высотой пирамиды.

Произвольная пирамида



Задача 1. *Дана треугольная пирамида $SABC$, у которой все плоские углы при вершине B — прямые, $AB = 2$, $BC = 3$, $SB = \sqrt{23}$. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.*

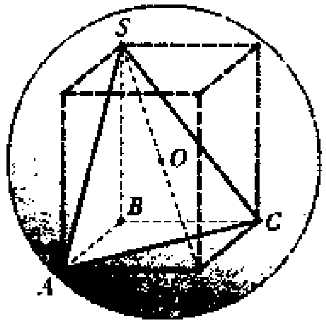
Решение. 1-й способ. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, лежит на середине гипотенузы AC — в точке O_1. Центр O описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку O_1 (свойство 3). С другой стороны, точка O равноудалена от вершин B и S. Параллельные прямые SB и OO_1 задают плоскость (точка O еще не найдена!). Пересечение серединного перпендикуляра к отрезку SB, проведенного в плоскости SBO_1, и указанного перпендикуляра из точки O_1 дает точку O — центр описанного шара с радиусом $R = OB$.

BO_1 — медиана треугольника ABC, $BO_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$;

$OO_1 = KB = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{23}$, так как $BKOO_1$ — прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника OO_1B находим искомый радиус:

$$R = OB = \sqrt{BO_1^2 + OO_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 13 + \frac{1}{4}\cdot 23} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3.$$



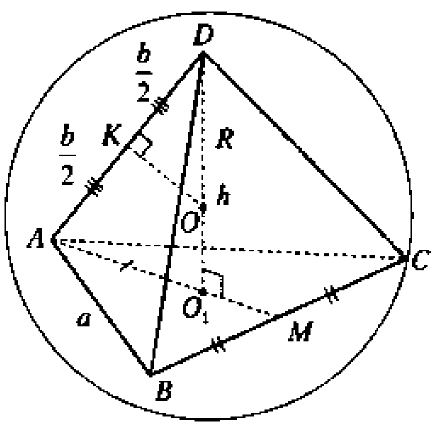
2-й способ. Достроим данную пирамиду до прямоугольного параллелепипеда. Шар, описанный около пирамиды, будет описанным и около данного прямоугольного параллелепипеда. А диагональ прямоугольного параллелепипеда является диаметром описанного шара. Диагональ параллелепипеда находится по формуле $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где a, b, c — измерения параллелепипеда. Тогда $SD = \sqrt{2^2 + 3^2 + \left(\sqrt{23}\right)^2} = \sqrt{4 + 9 + 23} = \sqrt{36} = 6$, $R = OS = \frac{1}{2}SD = 3$.

Ответ: 3.

Правильная треугольная пирамида

Алгоритм. Центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на пересечении высоты пирамиды (или ее продолжения) и серединного перпендикуляра к ребру пирамиды, проведенного в плоскости, образованной этим ребром и высотой пирамиды. Найдя центр шара, рассматриваем подобие прямоугольных треугольников.

Задача 2. *Правильная треугольная пирамида задана ребром a основания и боковым ребром b. Найти радиус описанного шара.*



Ключевая пропорция

$$\frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{h}{b}$$

Решение. 1-й способ.

Основание высоты правильной пирамиды совпадает с центром описанной около основания окружности. Поэтому любая точка, лежащая на высоте или ее продолжении, равноудалена от вершин основания, т. е. от точек A, B и C. Следовательно, центр O описанного шара лежит на высоте правильной пирамиды или ее продолжении. С другой стороны, центр O равноудален от точек A и D. Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AD в плоскости, заданной прямыми, проходящими через боковое ребро AD и высоту DO_1. Пересечение серединного перпендикуляра с высотой пирамиды или ее продолжением даст искомый центр O.

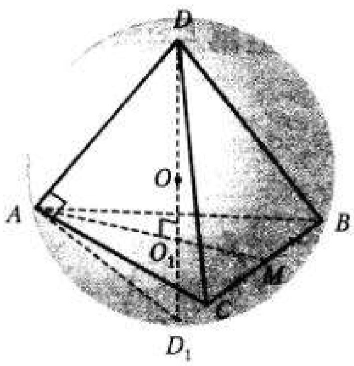
Прямоугольные треугольники DKO и DO_1A подобны, так как имеют общий острый угол KDO. Из подобия треугольников следует, что $\frac{KD}{DO} = \frac{DO_1}{AD}$.

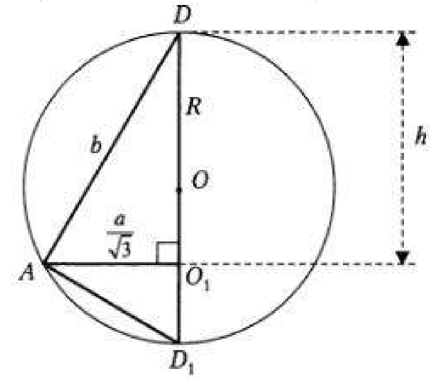
Так как $DK = \frac{b}{2}$, $DO = R$ — искомый радиус, $DO_1 = h$ — высота пирамиды, $AD = b$, то $\frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{h}{b}$, откуда $R = \frac{b^2}{2h}$. Необходимо найти высоту h. Отрезок $AO_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ как радиус окружности, описанной около основания ABC;

$$h = DO_1 = \sqrt{AD^2 - AO_1^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}. \text{ Получаем } R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}.$$

Например, при $b = 4$, $a = 3$ радиус $R = \frac{4^2}{2\sqrt{4^2 - \frac{3^2}{3}}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$.

2-й способ. Построим диаметр $DD_1 = 2R$ описанного шара.





Рассмотрим большой круг шара, проходящий через боковое ребро AD. В этот круг будет вписан прямоугольный треугольник DAD_1 с гипотенузой DD_1. Катет $AD = b$, $AO_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ — высота этого треугольника, опущенная на гипотенузу. Нужно найти гипотенузу прямоугольного треугольника по катету b и высоте $\frac{a}{\sqrt{3}}$, опущенной на гипотенузу: $DO_1 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу: $AD^2 = DO_1 \cdot DD_1$, т. е. $b^2 = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \cdot 2R$, откуда $R = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{3}}}$.

Ответ: $R = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{3}}}$.

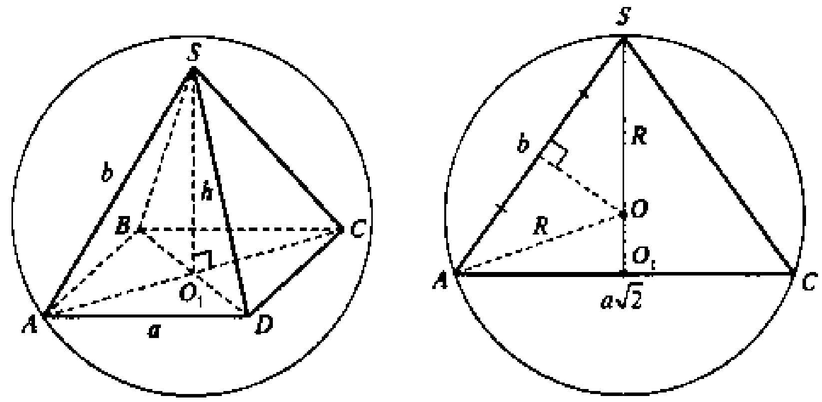
> Замечание. Аналогично находится радиус шара, описанного около пирамиды с равными и равно наклоненными боковыми ребрами.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найдите радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, которая задана:
1) ребром a основания и высотой h;
2) боковым ребром b и высотой h;
3) ребром a основания и углом наклона α бокового ребра;
4) ребром a основания и двугранным углом β при ребре основания.

Правильная четырехугольная пирамида

Задача 3. *Задана правильная четырехугольная пирамида (любым из известных способов). Найти радиус ее описанного шара.*



План решения.

Для нахождения радиуса шара, описанного около четырехугольной пирамиды, можно воспользоваться тем же способом, что описан выше. Кроме этого, можно воспользоваться тем фактом, что радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен радиусу окружности, описанной около ее диагонального сечения — равнобедренного треугольника ASC, где AS и CS — противоположные боковые ребра. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, можно найти любым известным из планиметрии способом.

Если дана сторона основания $AD=a$ и боковое ребро $AS=b$, то

$AC=a\sqrt{2}$; $AO_1=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, высота $SO_1=\sqrt{b^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$.

Далее:

а) можно провести серединный перпендикуляр к стороне AS до пересечения с высотой SO_1 и воспользоваться подобием прямоугольных треугольников (малого с гипотенузой SO и большого с гипотенузой AS);

б) использовать теорему синусов $\frac{b}{\sin\beta}=2R$, где b — любая сторона треугольника, β — противолежащий этой стороне угол;

в) воспользоваться формулой $R=\frac{abc}{4S}$.

Свойство 8.
Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды ($SABCD$), равен радиусу окружности, описанной около ее диагонального сечения (ΔASC).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найдите радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, которая задана:

1) ребром a основания и высотой h;
2) боковым ребром b и высотой h;
3) ребром a основания и углом наклона α бокового ребра;
4) высотой h и двугранным углом β при ребре основания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Шар** называется **вписанным в многогранник**, если он касается всех граней многогранника.

2. ПИРАМИДА И ВПИСАННЫЙ ШАР (СФЕРА)

Свойство 9.
В любую треугольную пирамиду (тетраэдр) можно вписать шар.

Свойство 10.
В произвольную n-угольную пирамиду можно вписать шар, если равны все двугранные углы при ребрах основания пирамиды. При этом центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды.

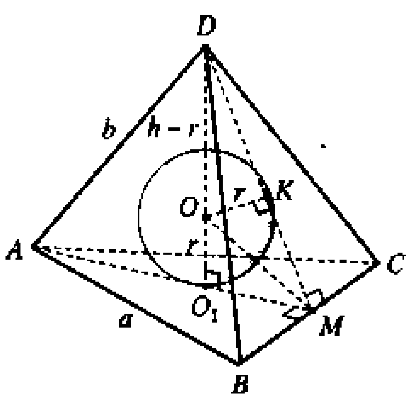
Свойство 11.
В любую *правильную* пирамиду можно вписать шар. При этом его центр лежит на высоте пирамиды, шар касается основания в его центре, а боковых граней — в точках, лежащих на апофемах.

Свойство 12.
Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на пересечении высоты пирамиды и биссектрисы угла, образованного апофемой пирамиды и ее проекцией на основание.

Правильная треугольная пирамида

Алгоритм. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на пересечении высоты пирамиды и биссектрисы угла, образованного апофемой и ее проекцией на основание. Найдя центр, используем свойство биссектрисы треугольника и составляем пропорцию.

Задача 4. *Правильная треугольная пирамида задана ребром a основания и боковым ребром b. Найти радиус вписанного шара.*



Ключевая пропорция
$$\frac{r}{h-r}=\frac{O_1M}{DM}$$

Решение. 1-й способ. Центр O вписанного шара лежит на высоте $DO_1 = h$, где O_1 — центр основания, DM — апофема, $OO_1 = OK = r$ — радиусы вписанного шара, $DO = h - r$. Прямоугольные треугольники DKO и DO_1M подобны по острому углу. Из подобия треугольников следует $\frac{OK}{OD}=\frac{O_1M}{DM}$, $\frac{r}{h-r}=\frac{O_1M}{DM}$. $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ как медиана и высота равностороннего треугольника; $O_1M=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (медианы точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника). Из прямоугольного треугольника DMB находим $DM =$ $=\sqrt{DB^2-BM^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$. Из прямоугольного треугольника DO_1M находим $h=DO_1=\sqrt{DM^2-O_1M^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{12}}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$.

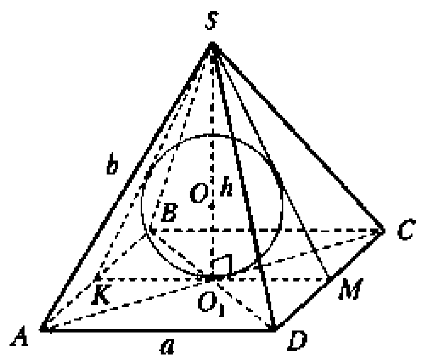
Используя ключевую пропорцию, получаем $\dfrac{r}{\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-r}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}}$,

откуда $r=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}+\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}}$.

Например, если $b=\sqrt{7}$, $a=\sqrt{12}$, то $r=\dfrac{\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}}{6}\sqrt{7-\frac{12}{3}}}{\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}}{6}+\sqrt{7-\frac{12}{4}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Замечание. Отрезок $O_1M = r_1$ можно найти как радиус вписанной окружности ΔABC, т. е. записать сразу $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2-й способ. Так как точка O равноудалена от сторон угла O_1MD, то MO – биссектриса треугольника DO_1M. По свойству биссектрисы треугольника (биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам) $\frac{O_1O}{OD} = \frac{O_1M}{DM}$, $\frac{r}{h-r} = \frac{O_1M}{DM}$. Далее решение совпадает с приведенным в 1-м способе.



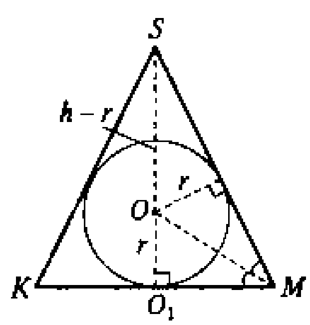
Правильная четырехугольная пирамида

При нахождении радиуса шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, можно воспользоваться любым из указанных выше способов для треугольной правильной пирамиды.

Кроме этого, можно воспользоваться тем фактом, что радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник KSM, где SM и SK — апофемы противоположных граней правильной пирамиды.

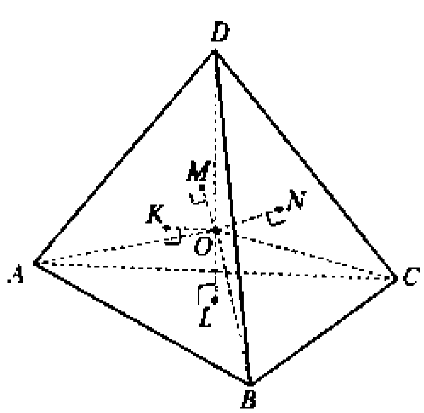
Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, можно найти любым известным из планиметрии способом.

В частности, помимо уже рассмотренного подобия прямоугольных треугольников с гипотенузами SO и SM и свойства биссектрисы треугольника можно воспользоваться формулой $S = pr$.



Произвольная пирамида

Шар, вписанный в многогранник, касается граней всех двугранных углов этого многогранника. Так как центр шара, вписанного в двугранный угол, лежит на биссекторной полуплоскости данного угла, то центр шара, вписанного в многогранник, в частности в пирамиду, лежит на пересечении биссекторных полуплоскостей всех ее двугранных углов. Поэтому нахождение центра и радиуса вписанного шара — довольно непростая задача. Выведем формулу, позволяющую упростить эту задачу.



Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду. Для n-угольной описанной пирамиды рассуждения будут аналогичны.

Соединим центр вписанного шара с вершинами пирамиды. Данная пирамида разобьется на четыре пирамиды с общей вершиной в точке O: $OABC$, $OABD$, $OADC$, $OBCD$. Радиусы r, опущенные из центра шара на грани данной пирамиды, будут высотами данных пирамид. Пусть площади граней пирамиды равны S_1, S_2, S_3, S_4.

Объем данной пирамиды будет равен сумме объемов указанных четырех пирамид:

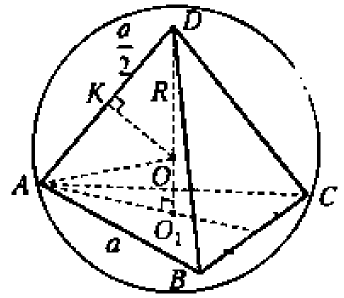
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \frac{1}{3}S_3r + \frac{1}{3}S_4r =$$

$$= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\cdot r = \frac{1}{3}S_{\text{полн}}\cdot r.$$

$$\boxed{r = \frac{3V}{S}}$$

Отсюда $r = \frac{3V}{S}$, где V – объем данной пирамиды, S – площадь полной поверхности пирамиды.

Задача А.



Найти радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

Решение. Из подобия треугольников KDO и DO_1A получаем пропорцию $\frac{KD}{DO}=\frac{DO_1}{AD}$; $\frac{\frac{a}{2}}{R}=\frac{h}{a}$, $R=\frac{a^2}{2h}$.

Из треугольника ABC находим $AO_1=\frac{a}{\sqrt{3}}$ — радиус описанной окружности. Высота $DO_1=\sqrt{AD^2-AO_1^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

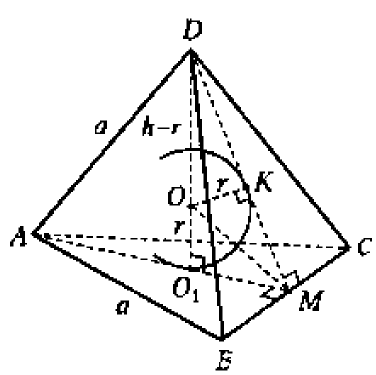
Тогда радиус шара $R=\frac{a^2}{2h}=\frac{a^2}{2\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Замечание. Полезно запомнить формулу высоты правильного тетраэдра:

$$\boxed{h=a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Задача В.



Найти радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

Решение. OM — биссектриса треугольника DO_1M. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{O_1O}{OD}=\frac{O_1M}{DM}$, т. е. $\frac{r}{h-r}=\frac{O_1M}{DM}$. $\Delta ABC=\Delta BDC$ — равносторонние треугольники со стороной a. $O_1M=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}DM$ — радиус вписанной окружности ΔABC (или третья часть медианы).

Получаем $\frac{r}{h-r}=\frac{1}{3}$, откуда $4r=h$, $r=\frac{h}{4}$.

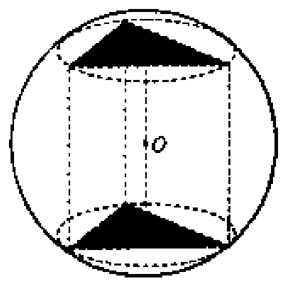
Высота правильного тетраэдра $h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (см. задачу А). Поэтому радиус вписанного шара $r=\frac{h}{4}=\frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{4}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

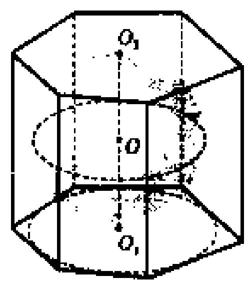
Замечание. Можно заметить, что $R=3r$, откуда следует, что $DO=R$. То есть для правильного тетраэдра центры описанного и вписанного шаров совпадают, а их радиусы относятся как $3:1$.

Высота правильного тетраэдра $h=R+r$.

3. ШАР И ПРИЗМА

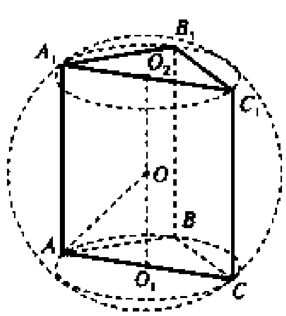


Свойство 13.
Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры кругов, описанных около оснований призмы.
Около прямой призмы можно описать шар только в том случае, если около основания призмы можно описать окружность.



Свойство 14.
Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит на середине отрезка, соединяющего центры кругов, вписанных в основания призмы. Высота призмы равна диаметру шара, а круг, вписанный в основание призмы, равен большому кругу шара.
В прямую призму можно вписать шар, если в основание призмы можно вписать окружность и при этом высота призмы равна диаметру этой окружности.

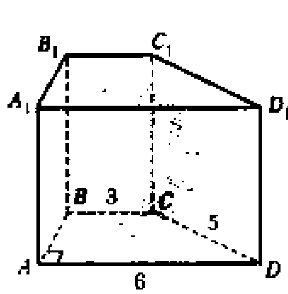
Задача 5. *В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами* 12, 16, 20. *Высота призмы равна* 14. *Найдите радиус* R *сферы, описанной около данной призмы. В ответе запишите значение* R^2.



Решение. Около любого треугольника можно описать окружность. Поэтому около любой прямой треугольной призмы можно описать сферу. Центр этой сферы лежит на середине высоты, соединяющей центры окружностей, описанных около оснований призмы. Так как $12 = 3\cdot 4$; $16 = 4\cdot 4$; $20 = 5\cdot 4$; $3^2 + 4^2 = 5^2$, то $12^2 + 16^2 = 20^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, в основании призмы лежит прямоугольный треугольник. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы. Пусть $AC = A_1C_1 = 20$ — гипотенузы, O_1 и O_2 — их середины. Тогда O_1O_2 — высота, O — ее середина, $OA = R$ — радиус описанной сферы. $AO_1 = \frac{1}{2}AC = 10$, $OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = \frac{1}{2}\cdot 14 = 7$. Из прямоугольного треугольника AO_1O находим $AO = R = \sqrt{AO_1^2 + OO_1^2} = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}$.

Ответ: $\sqrt{149}$.

Задача 6. *В основании призмы, боковое ребро которой перпендикулярно основанию, лежит прямоугольная трапеция с основаниями* 3 *и* 6 *и большей боковой стороной, равной* 5. *В призму вписана сфера. Найдите объем призмы.*



Решение. Так как боковое ребро призмы перпендикулярно основанию, то это — прямая призма. По условию в призму вписана сфера, поэтому в ее основание можно вписать окружность, радиус которой равен радиусу сферы, а высота призмы равна диаметру сферы. Найдя диаметр окружности, вписанной в трапецию, мы найдем высоту призмы.
Так как трапеция $ABCD$ является описанной, то по свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$, откуда $AB + 5 = 3 + 6$, $AB = 4$. Так

как трапеция $ABCD$ — прямоугольная, то диаметр вписанной окружности равен ее высоте и равен стороне AB, т. е. $2r = AB = 4$. Тогда высота призмы $h = 4$, площадь ее основания $S_{осн} = S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = \frac{3+6}{2} \cdot 4 = 18$.

Объем призмы $V = S_{осн} \cdot h = 18 \cdot 4 = 72$.

Ответ: 72.

Свойство 15.
В наклонную призму можно вписать шар, если в ее перпендикулярное сечение можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру окружности.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№ 1. Найдите радиус шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3, 4, $\sqrt{11}$.

[Ответ: 3].

№ 2. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, описанной около сферы с радиусом 4.

[Ответ: 384].

№ 3. Найдите радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 4 и высотой, равной 2.

[Ответ: 4].

№ 4. Найдите радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду с ребром основания, равным 6, и двугранным углом при основании, равным 60°.

[Ответ: 3].

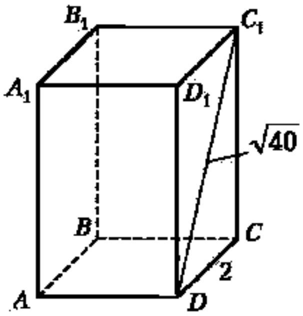
№ 5. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны 6.

[Ответ: $3-\sqrt{3}$].

SUPER тест

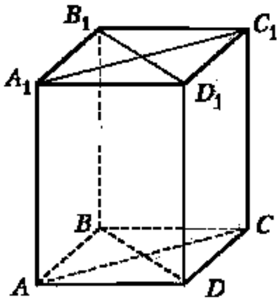
Вариант 1

1. $A...D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $DC_1=\sqrt{40}$, $DC=2$, $P_{ABCD}=10$.
Найдите диагональ параллелепипеда.



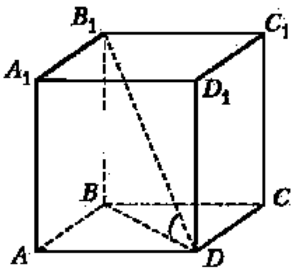
Ответ:

2. Основание прямой призмы — ромб $ABCD$. Площади диагональных сечений равны 60 и 80, высота призмы равна 10.
Найдите $S_{бок}$.



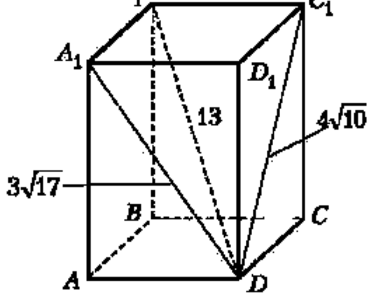
Ответ:

3. $A...D_1$ — правильная призма, $\angle B_1DB=45°$, $S_{полн}=32(2\sqrt{2}+1)$.
Найдите AD.



Ответ:

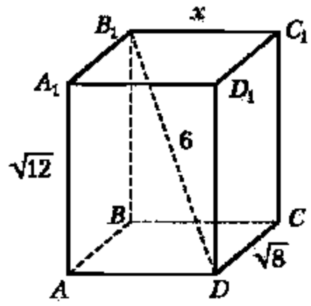
4. $A...D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $DB_1=13$, $DA_1=3\sqrt{17}$, $DC_1=4\sqrt{10}$.
Найдите $S_{бок}$.



Ответ:

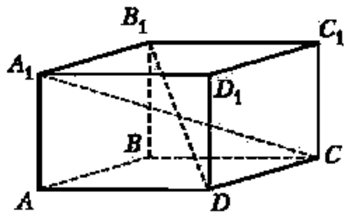
Вариант 2

1. $A...D_1$ — прямоугольный параллелепипед. По данным на рисунке найдите длину ребра B_1C_1.



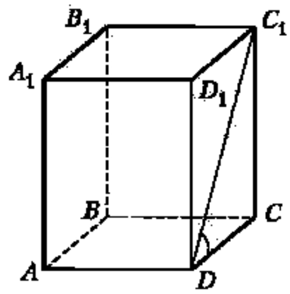
Ответ:

2. Основание прямой призмы — ромб $ABCD$. Диагонали призмы равны 10 и 16, высота призмы равна 4.
Найдите $S_{бок}$.



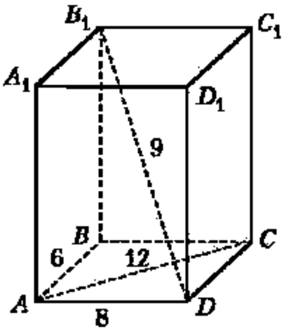
Ответ:

3. $A...D_1$ — правильная призма, $\angle C_1DC=60°$, $S_{полн}=128(2\sqrt{3}+1)$.
Найдите AD.



Ответ:

4. $A...D_1$ — прямой параллелепипед, $AB=6$, $AD=8$, $AC=12$, $DB_1=9$.
Найдите $S_{бок}$.

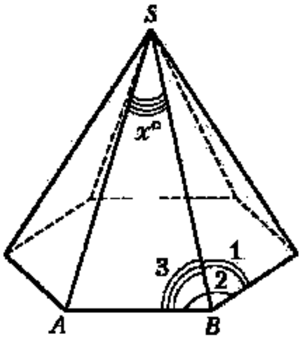


Ответ:

SUPER тест

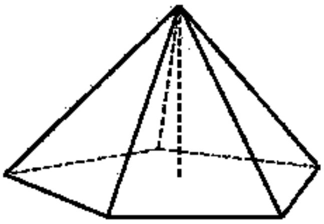
Вариант 1

5. Дана правильная 6-угольная пирамида. Сумма плоских углов 1, 2 и 3 равна 280°.
Найдите $\angle ASB$.



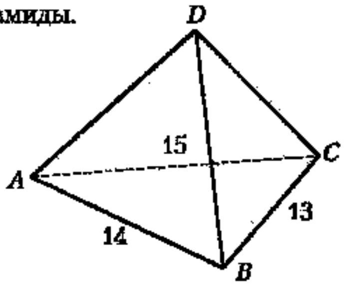
Ответ:

6. Дана правильная 5-угольная пирамида, высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в основание, $S_{осн} = \sqrt{800}$.
Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



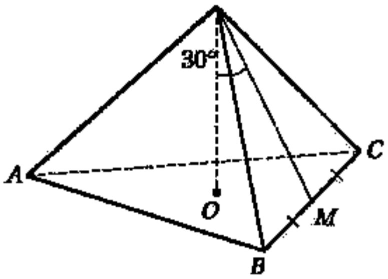
Ответ:

7. Высоты боковых граней пирамиды $DABC$, проведенные из вершины D, равны по 5, $AB = 14$, $BC = 13$, $AC = 15$.
Найдите высоту пирамиды.



Ответ:

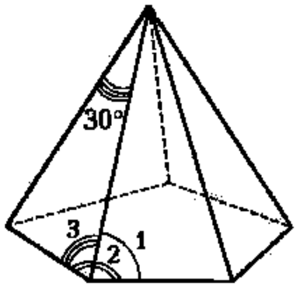
8. $DABC$ — правильная пирамида, DO — высота, $\angle ODM = 30°$. Площадь сечения пирамиды плоскостью ADM равна $18\sqrt{3}$.
Найдите AB.



Ответ:

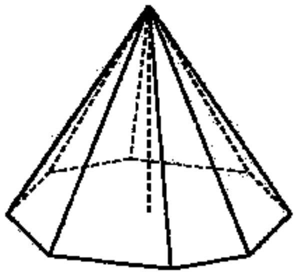
Вариант 2

5. Дана правильная 5-угольная пирамида.
Найдите сумму плоских углов 1, 2 и 3.



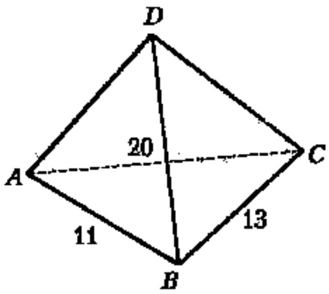
Ответ:

6. Дана правильная 8-угольная пирамида, $S_{бок} = 2S_{осн}$, высота пирамиды равна $\sqrt{12}$.
Найдите радиус окружности, вписанной в основание.



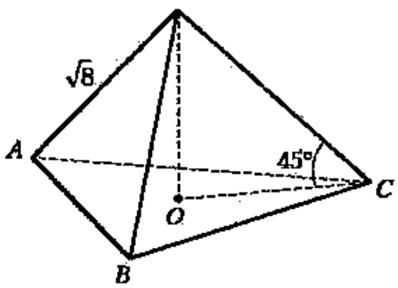
Ответ:

7. Высоты боковых граней пирамиды $DABC$, проведенные из вершины D, равны между собой. Высота пирамиды равна 4, $AB = 11$, $BC = 13$, $AC = 20$.
Найдите $S_{бок}$.



Ответ:

8. $DABC$ — правильная пирамида, DO — высота, $\angle DCO = 45°$, $AD = \sqrt{8}$.
Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью AOD.

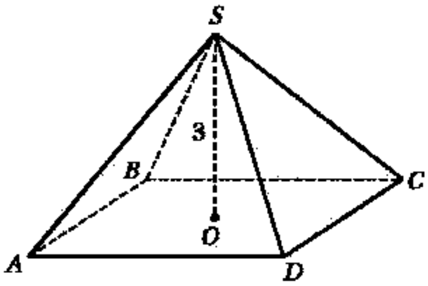


Ответ:

SUPER тест

Вариант 1

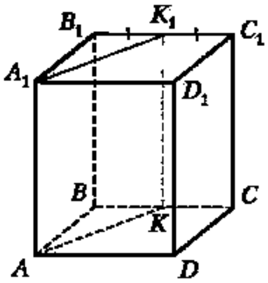
9. $SABCD$ — правильная пирамида с высотой 3, площадь боковой поверхности равна 80.
Найдите площадь полной поверхности пирамиды.



Ответ:

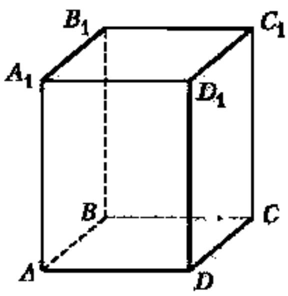
10. K — середина ребра BC. Объем призмы $ABKA_1B_1K_1$ относится к объему параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ как:

1) 1 : 2;
2) 1 : 3;
3) 2 : 3;
4) 1 : 4.



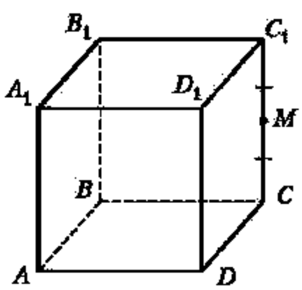
Ответ:

11. Площадь боковой грани правильной 4-угольной призмы равна 72 см^2, площадь основания равна 64 см^2.
Найдите объем призмы.



Ответ:

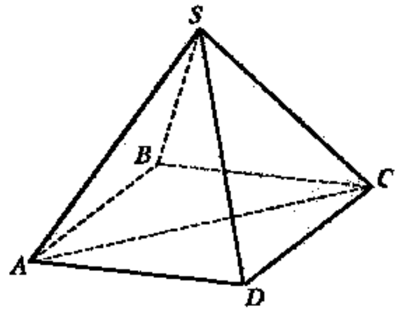
12. Плоскость ADM, где $CM = MC_1$, делит куб на две части
Найдите отношение объема большей части к объему меньшей.



Ответ:

Вариант 2

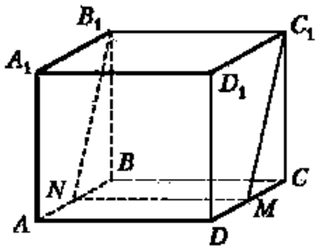
9. $SABCD$ — правильная пирамида, площадь боковой поверхности равна 60, площадь диагонального сечения равна $12\sqrt{2}$.
Найдите площадь полной поверхности пирамиды.



Ответ:

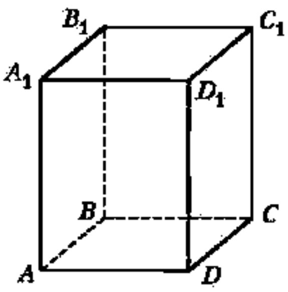
10. N и M — середины ребер параллелепипеда. Объем призмы $AA_1B_1NDD_1C_1M$ относится к объему параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ как:

1) 1 : 2;
2) 2 : 3;
3) 3 : 4;
4) 2 : 5.



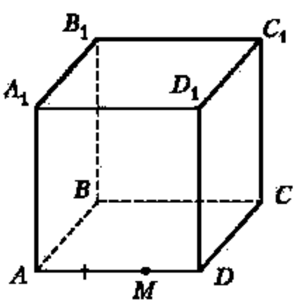
Ответ:

11. Периметр основания правильной 4-угольной призмы равен 12 см, периметр боковой грани равен 18 см.
Найдите объем призмы.



Ответ:

12. Плоскость BB_1M, где $AM : MD = 2 : 1$, делит куб на две части. Если объем меньшей части равен 6, то чему равен объем куба?

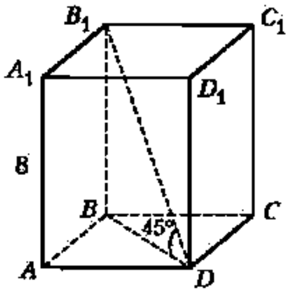


Ответ:

SUPER тест

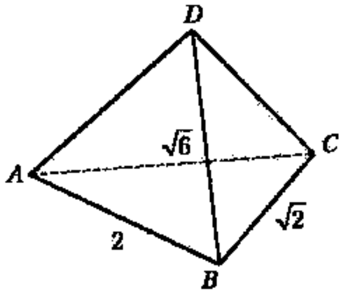
Вариант 1

13. Высота правильной 4-угольной призмы равна 8, угол наклона диагонали к основанию равен 45°.
Найдите объем призмы.



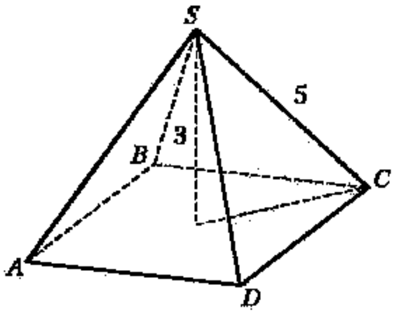
Ответ:

14. Все боковые грани тетраэдра наклонены к основанию под углом 45°. Стороны основания равны 2, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}$.
Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра.



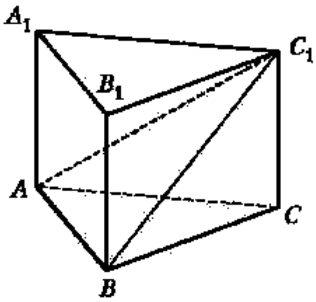
Ответ:

15. Высота правильной пирамиды равна 3, боковое ребро равно 5.
Найдите объем пирамиды.



Ответ:

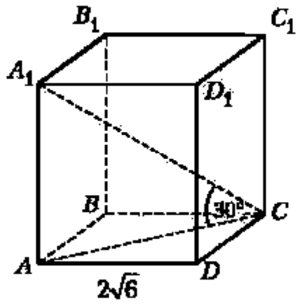
16. $A...C_1$ — призма с объемом 48.
Найдите объем пирамиды C_1ABC.



Ответ:

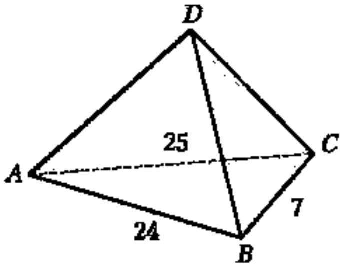
Вариант 2

13. Сторона основания правильной 4-угольной призмы равна $2\sqrt{6}$, угол наклона диагонали к основанию равен 30°.
Найдите объем призмы.



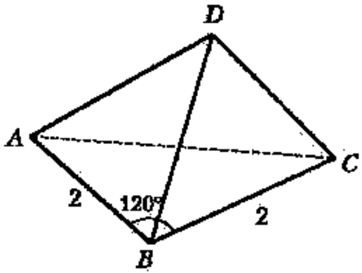
Ответ:

14. Все боковые грани тетраэдра наклонены к основанию под углом 60°. Стороны основания равны 7, 24 и 25.
Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра.



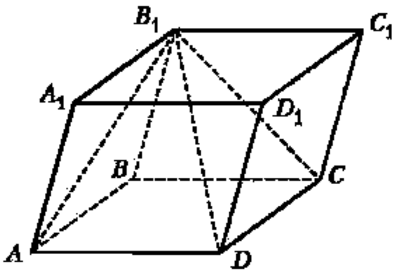
Ответ:

15. $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 120°$. Боковые ребра DA, DB и DC наклонены к основанию под углом 60°.
Найдите объем тетраэдра.



Ответ:

16. $A...D_1$ — наклонный параллелепипед, объем пирамиды B_1ABCD равен 12.
Найдите объем параллелепипеда.

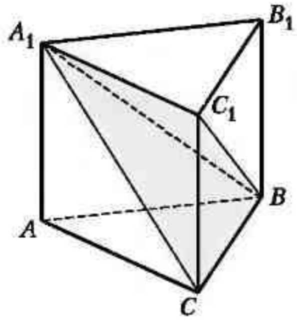


Ответ:

SUPER тест

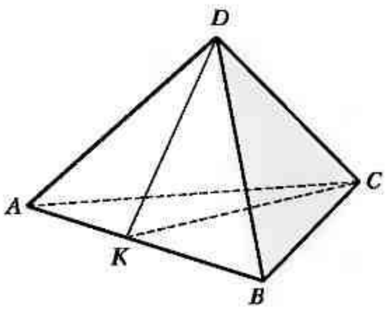
Вариант 1

17. Объем призмы $A...C_1$ равен 87.
Найдите объем пирамиды C_1A_1BC.



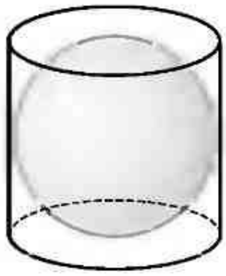
Ответ:

18. $AK : KB = 2 : 3$. Объем пирамиды $DBKC$ равен 24.
Найдите объем пирамиды $DABC$.



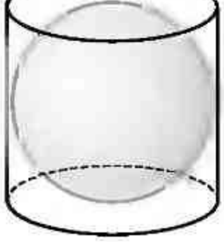
Ответ:

19. Цилиндр описан вокруг сферы. Площадь сферы равна 20.
Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Ответ:

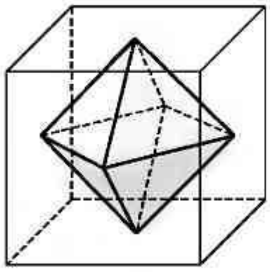
20. Цилиндр описан вокруг шара с радиусом 2. Объем цилиндра равен $\pi \cdot x$.
Найдите x.



Ответ:

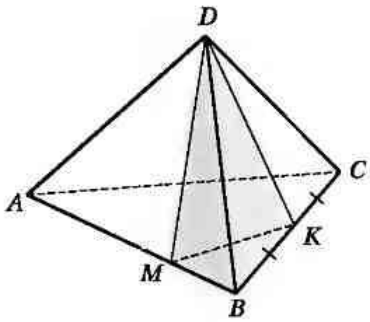
Вариант 2

17. Центры граней куба являются вершинами октаэдра. Объем октаэдра равен 12.
Найдите объем куба.



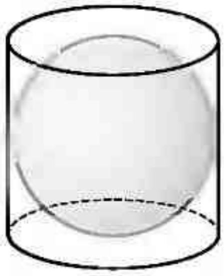
Ответ:

18. $BM : MA = 1 : 2$, $BK = KC$.
Найдите отношение объема пирамиды $DABC$ к объему пирамиды $DMBK$.



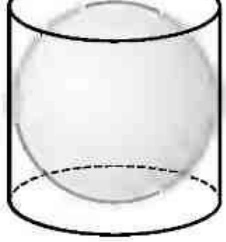
Ответ:

19. Сфера вписана в цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 23.
Найдите площадь поверхности сферы.



Ответ:

20. Цилиндр описан вокруг шара. Объем шара равен 16.
Найдите объем цилиндра.

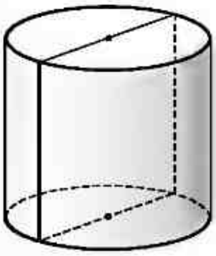


Ответ:

SUPER тест

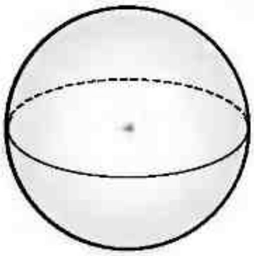
Вариант 1

21. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 91π.
Найдите площадь осевого сечения цилиндра.



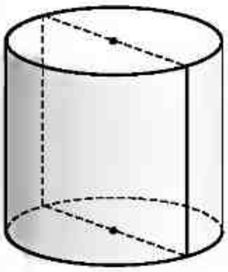
Ответ:

22. Площадь большого круга шара равна 16.
Найдите площадь поверхности шара.



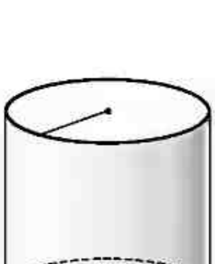
Ответ:

23. Высота цилиндра равна 24, диагональ осевого сечения — 26.
Найдите объем цилиндра.



Ответ:

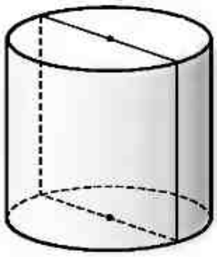
24. Радиус цилиндра равен 3, площадь боковой поверхности — 200.
Найдите объем цилиндра.



Ответ:

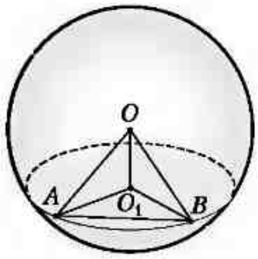
Вариант 2

21. Осевое сечение цилиндра — квадрат с площадью 173.
Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



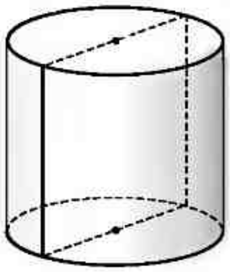
Ответ:

22. O — центр шара, O_1 — центр шарового сечения. Угол AOB равен 60°, угол ABO_1 — 45°. Площадь большого круга шара равна 12.
Найдите площадь сечения.



Ответ:

23. Площадь осевого сечения цилиндра равна 10, длина окружности основания — 8.
Найдите объем цилиндра.



Ответ:

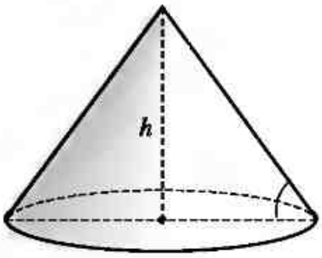
24. Площадь основания конуса равна 40, образующая конуса наклонена к основанию под углом 60°.
Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ:

SUPER тест

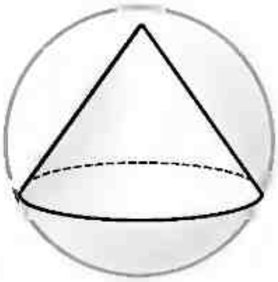
Вариант 1

25. Периметр осевого сечения конуса равен 32, косинус угла между образующей и основанием равен 0,6.
Найдите высоту конуса.



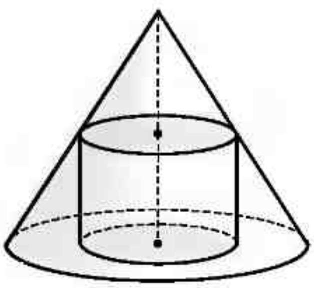
Ответ:

26. В шар с радиусом 6 вписан равносторонний конус. Объем конуса равен $\pi \cdot x$.
Найдите x.



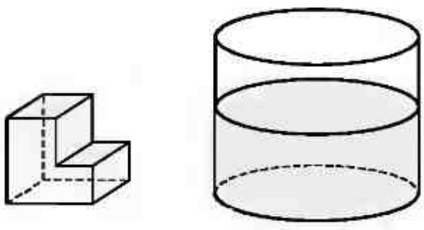
Ответ:

27. В конус вписан цилиндр, высота которого в 2 раза меньше высоты конуса. Объем конуса равен 48.
Найдите объем цилиндра.



Ответ:

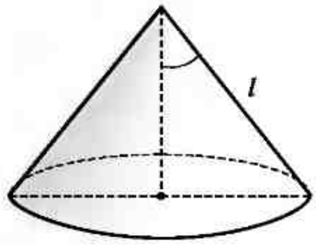
28. В цилиндрический сосуд налили 3 л воды, уровень воды достиг высоты 15 см. После погружения в воду детали уровень воды поднялся на 4 см.
Найдите объем детали в см^3.



Ответ:

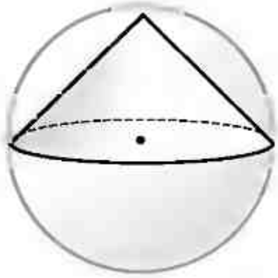
Вариант 2

25. Площадь осевого сечения конуса равна 48, тангенс угла между высотой и образующей равен 0,75.
Найдите образующую конуса.



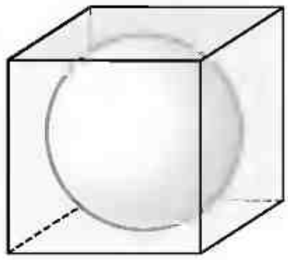
Ответ:

26. В шар с радиусом 3 вписан конус. Центр шара принадлежит основанию конуса. Объем конуса равен $\pi \cdot x$.
Найдите x.



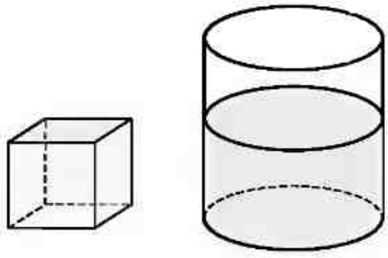
Ответ:

27. Ребро куба равно 6. Объем шара, вписанного в куб, равен $\pi \cdot x$.
Найдите x.



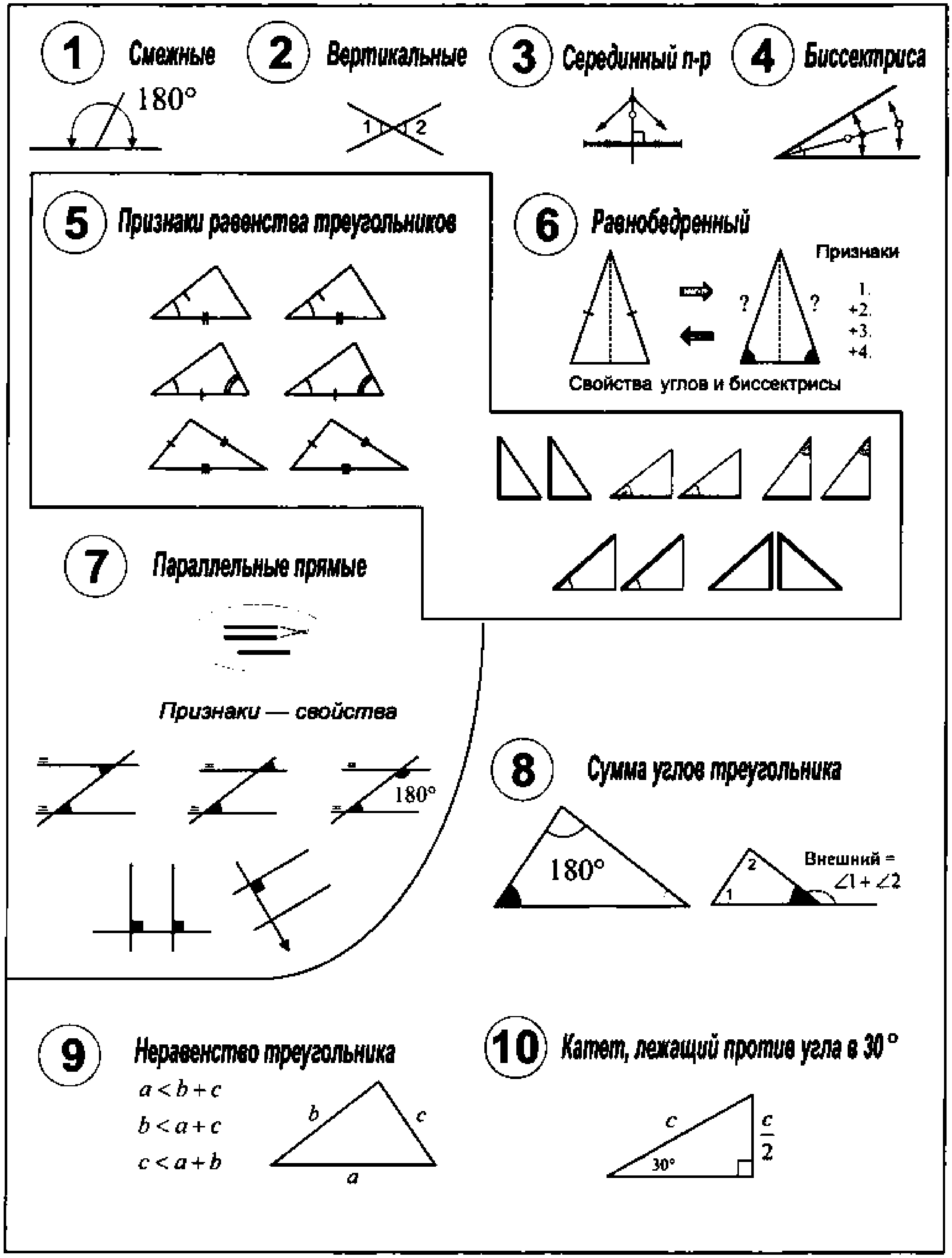
Ответ:

28. В цилиндрический сосуд налили 4 л воды, уровень воды достиг высоты 20 см. После погружения в воду куба уровень воды поднялся на 5 см.
Найдите длину ребра куба в см.



Ответ:

Геометрия 7 класс



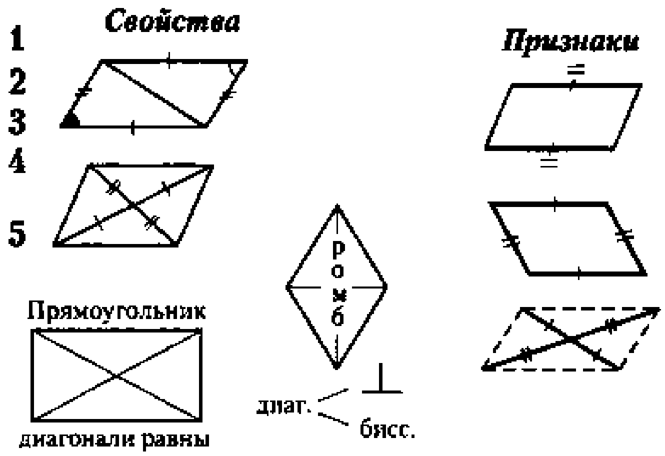
ПОВТОРЕНИЕ. 7 класс

Смежные углы	**1.** Сумма смежных углов равна 180°.
Вертикальные углы	**2.** Вертикальные углы равны.
Серединный перпендикуляр	**3.** Серединный перпендикуляр к отрезку — это прямая, которая проходит через середину отрезка и перпендикулярна ему. Все точки серединного перпендикуляра равноудалены от концов отрезка, и наоборот, если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.
Биссектриса угла	**4.** Биссектриса угла — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.
Признаки равенства треугольников	**5.** Признаки равенства произвольных треугольников: — по двум сторонам и углу между ними; — по стороне и двум прилежащим к ней углам; — по трем сторонам. Признаки равенства прямоугольных треугольников: — по двум катетам; — по катету и прилежащему острому углу; — по катету и противолежащему острому углу; — по гипотенузе и острому углу; — по гипотенузе и катету.
Равнобедренный треугольник	**6.** Свойства равнобедренного треугольника: – углы при основании равнобедренного треугольника равны; – биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника, проведенные из вершины к основанию, совпадают. Признаки равнобедренного треугольника 1. Если у треугольника два угла равны, то он — равнобедренный. 2. Если у треугольника медиана является в то же время и биссектрисой, или высота является медианой, или высота является биссектрисой, то треугольник — равнобедренный.
Параллельные прямые	**7.** Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой. Если накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны, и наоборот. На плоскости два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой.
Сумма углов треугольника	**8.** Сумма углов треугольника равна 180°. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. И наоборот, если сумма двух углов треугольника равна 90°, то треугольник — прямоугольный.
Внешний угол	Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.
Неравенство треугольника	**9.** В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других его сторон.
	10. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

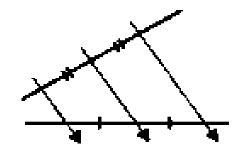
Геометрия 8 класс

Сумма углов многоугольника $180^\circ(n-2)$

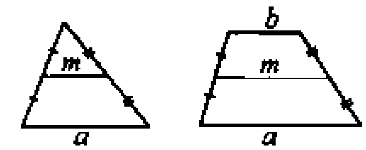
Параллелограмм



Теорема Фалеса



СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ

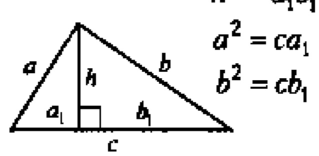


$m = \frac{a}{2}$ $\quad m = \frac{a+b}{2}$

МЕДИАНЫ 2 : 1

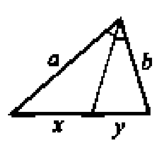
ПОДОБИЕ

1-й признак
2-й признак
3-й признак



$h^2 = a_1 b_1$
$a^2 = c a_1$
$b^2 = c b_1$

Свойство биссектрисы треугольника

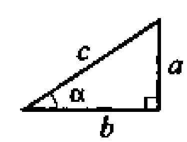


$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Тригонометрические функции острого угла

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$

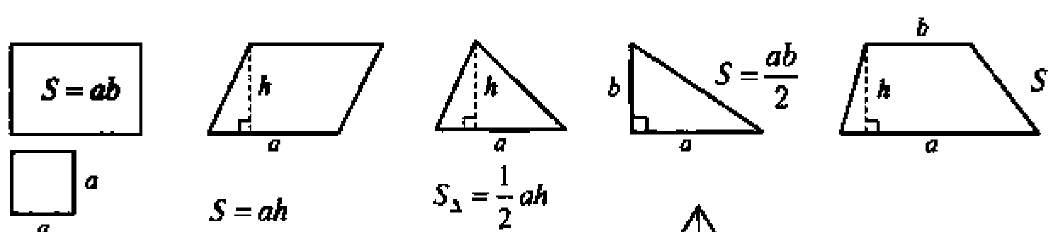
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$



$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha\end{array}}$$

ПЛОЩАДИ

$\boxed{S = ab}$



$S = \frac{ab}{2}$ $\quad S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

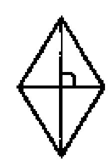
$S = a^2$

$S = ah$

$S = ab\sin\gamma$

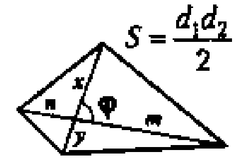
$S_\Delta = \frac{1}{2}ah$

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$



$S = \frac{d_1 d_2}{2}$

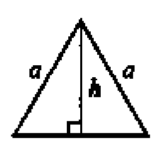
$S = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi$



Т. Пифагора

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

и обратная



$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Площади подобных треугольников

$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = k^2$

ПОВТОРЕНИЕ. 8 класс

Многоугольник 1. Сумма внутренних углов n-угольника равна $180°(n-2)$.

Параллелограмм 2. Свойства параллелограмма:
1) сумма соседних углов равна 180°;
2) диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника;
3—4) у параллелограмма противоположные стороны и углы равны;
5) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Признаки параллелограмма
1. Если у четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то данный четырехугольник — параллелограмм.
2. Если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то данный четырехугольник — параллелограмм.
3. Если у четырехугольника диагонали точкой пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник — параллелограмм.

Прямоугольник 3. Диагонали прямоугольника равны. И наоборот, если диагонали параллелограмма равны, то он — прямоугольник.

Ромб 4. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

Теорема Фалеса 5. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки. И наоборот, если на сторонах угла от его вершины отложить равные отрезки, то прямые, проходящие через их концы, будут параллельны.

Средняя линия треугольника и трапеции 6. Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.
7. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Свойство медиан 8. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Признаки подобия треугольников 9. У подобных треугольников углы равны, а стороны — пропорциональны.
Признаки подобия треугольников:
— по двум углам;
— по двум сторонам и углу между ними;
— по трем сторонам.

Среднее пропорциональное 10. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}\alpha$ 11. *Синусом* острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. *Косинусом* острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. *Тангенсом* острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему. *Котангенсом* острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Площади 12. $S_{\text{квадрата}} = a^2$; $S_{\text{прямоугольника}} = ab$; $S_{\text{параллелограмма}} = ah = ab\sin\gamma$;

$S_\triangle = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; $S_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь равностороннего треугольника;

$S_\triangle = \frac{ab}{2}$ — площадь прямоугольного треугольника; $S_{\text{трапеции}} = \frac{a+b}{2}h$;

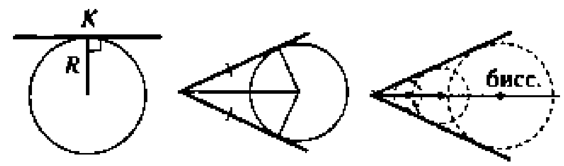
$S_{\text{ромба}} = \frac{d_1d_2}{2}$; $S = \frac{d_1d_2}{2}\sin\varphi$ — площадь произвольного четырехугольника.

Теорема Пифагора 13. Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Обратная теорема: если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник — прямоугольный.

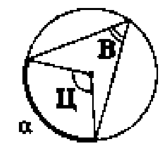
Площади подобных треугольников 14. Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных (соответственных) сторон.

Геометрия 9 класс

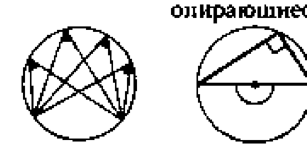
Свойства касательной



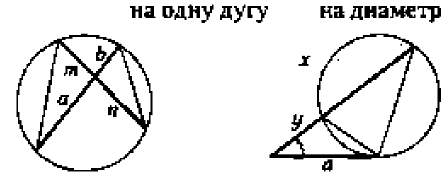
Вписанный равен половине центрального



опирающиеся



на одну дугу на диаметр

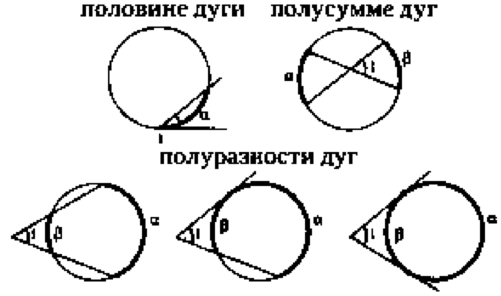


$ab = mn$ $a^2 = xy$

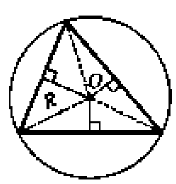
∠1 равен ...

половине дуги полусумме дуг

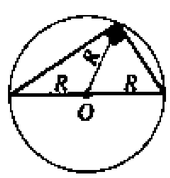
полуразности дуг



Описанная

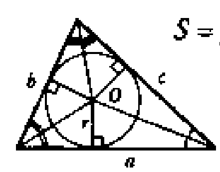


$S = \frac{abc}{4R}$

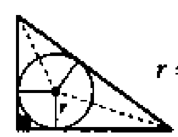


$R = \frac{c}{2}$

Вписанная

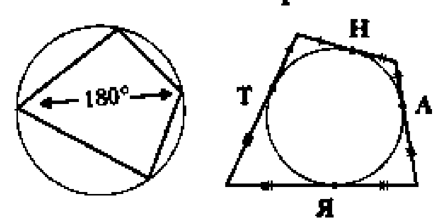


$S = pr$



$r = \frac{a+b-c}{2}$

Свойства – признаки



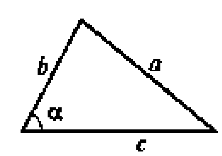
Синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

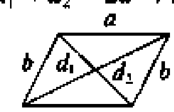
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = 2R}$$

Косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



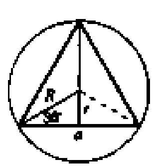
1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
2. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$



3. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$
4. $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

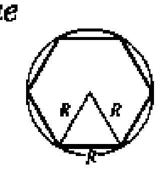
Герона

Правильные



$\boxed{a = R\sqrt{3}}$

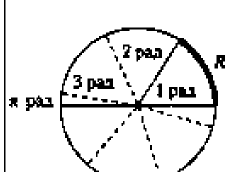
$r = \frac{1}{2}R$



$\boxed{a = R}$

$$\boxed{\frac{l_{дуги}}{C} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{сек}}{S_{круга}}}$$

Длина дуги и площадь сектора



1 радиан ≈ 57°

Радиан $\boxed{\pi\ рад = 180^\circ}$

$\frac{\pi}{2}\ рад = 90^\circ$ $\frac{\pi}{6}\ рад = 30^\circ$

$$C_{окр} = 2\pi R \qquad S_{кр} = \pi R^2$$

ПОВТОРЕНИЕ. 9 класс

Касательная

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны между собой.
3. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Вписанный угол

4. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла и половине дуги α, на которую он опирается: $\angle B = \frac{1}{2}\angle Ц = \frac{1}{2}\alpha$.

Окружность и углы

5. 1) Угол между касательной и секущей, проходящей через точку касания, равен половине угла, заключенного между касательной и секущей: $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$.

2) Угол между двумя хордами равен полусумме дуг, заключенных внутри данного угла и ему вертикального: $\angle 1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

3) Угол между двумя секущими (секущей и касательной, двумя касательными) равен полуразности дуг, заключенных внутри угла: $\angle 1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

6. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
7. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

Свойство пересекающихся хорд

8. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой: $ab = mn$.

Свойство касательной и секущей

9. Квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на ее внешнюю часть: $a^2 = xy$.

Описанная окружность

10. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус этой окружности находится из формулы $S = \frac{abc}{4R}$ или $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$.
11. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а радиус равен половине гипотенузы, т. е. $R = \frac{c}{2}$.

Вписанная окружность

12. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис треугольника, а радиус этой окружности находится из формулы $S = pr$.
13. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находится по формуле $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$.

Вписанный четырехугольник

14. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°. И наоборот, если сумма двух противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Описанный четырехугольник

15. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны между собой, т. е. $Т + А = Н + Я$. И наоборот, если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны между собой, то в него можно вписать окружность.

Теорема синусов

16. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности треугольника.

Теорема косинусов

17. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
18. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.
19. Формула медианы треугольника: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Формула Герона

20. Формула площади треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
21. $a = R\sqrt{3}$ — сторона правильного треугольника, $a = R$ — сторона правильного шестиугольника.
22. $C = 2\pi R$ — длина окружности, $S = \pi R^2$ — площадь круга.
23. $\frac{l_{дуги}}{C} = \frac{\alpha°}{360°} = \frac{S_{сек}}{S_{круга}}$ — нахождение длины дуги и площади сектора по градусной мере.

Перевод градусов в радианы и наоборот:

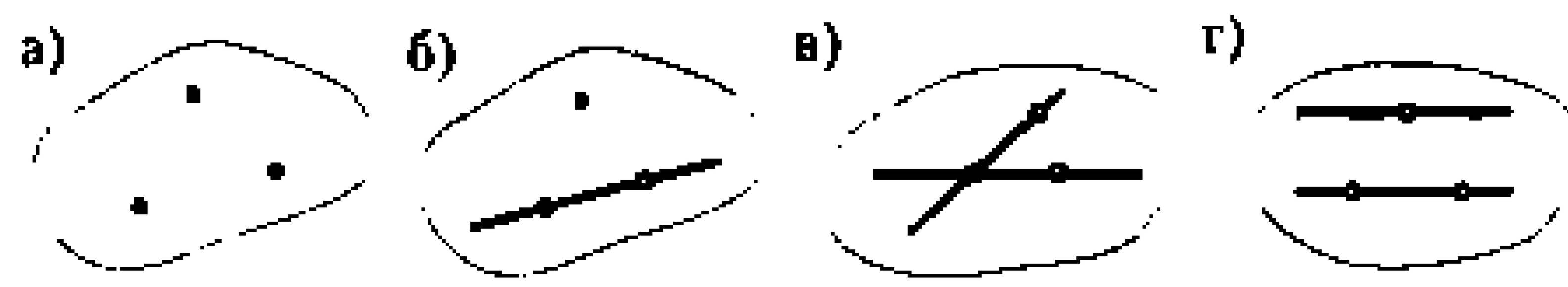
$$\boxed{\begin{array}{l} \pi\ рад - 180° \\ A\ рад - \alpha° \end{array}}$$

24. Радианная мера угла: $\pi\ рад = 180°$; $\frac{\pi}{2} = 90°$; $\frac{\pi}{3} = 60°$; $\frac{\pi}{4} = 45°$; $\frac{\pi}{6} = 30°$; $2\pi = 360°$.

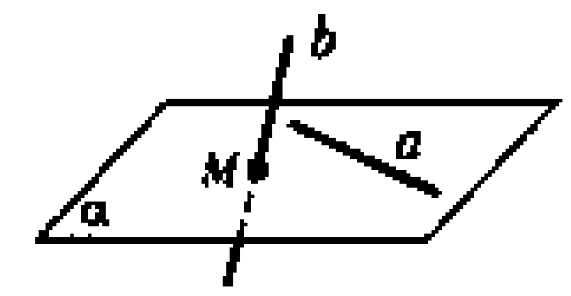
Геометрия 10 класс

Прямые и плоскости в пространстве

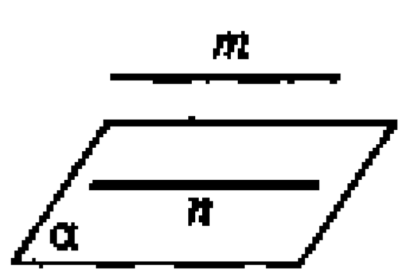
4 способа задания плоскости



ПРИЗНАК СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

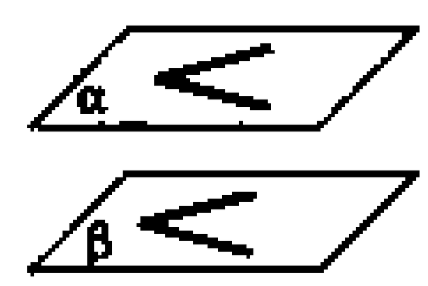


ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



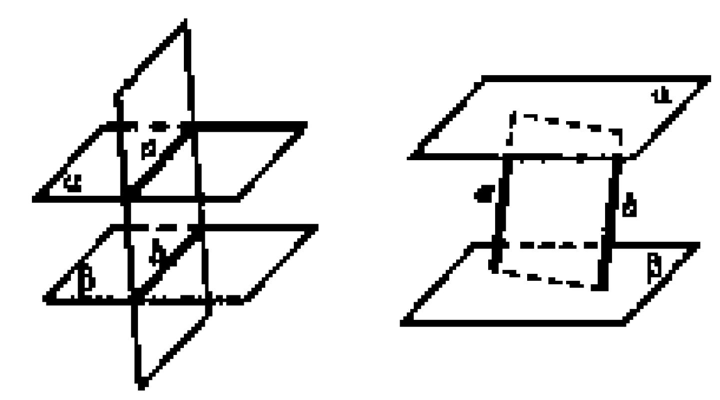
$m \parallel \alpha$

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

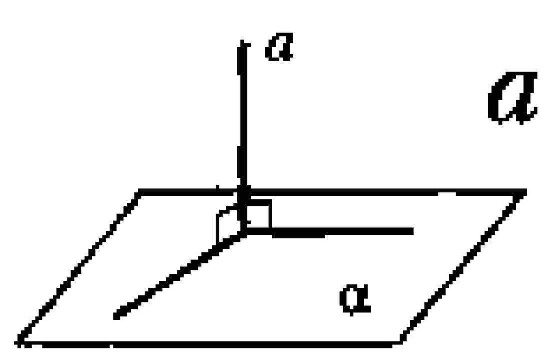


$\alpha \parallel \beta$

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

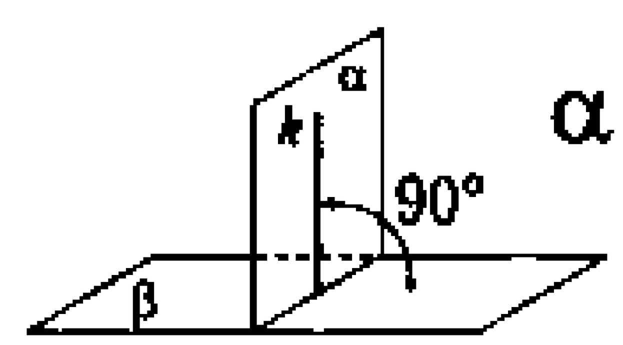


ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



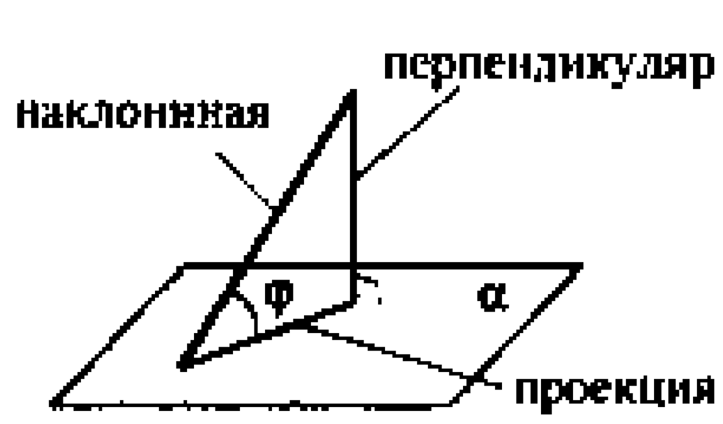
$a \perp \alpha$

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

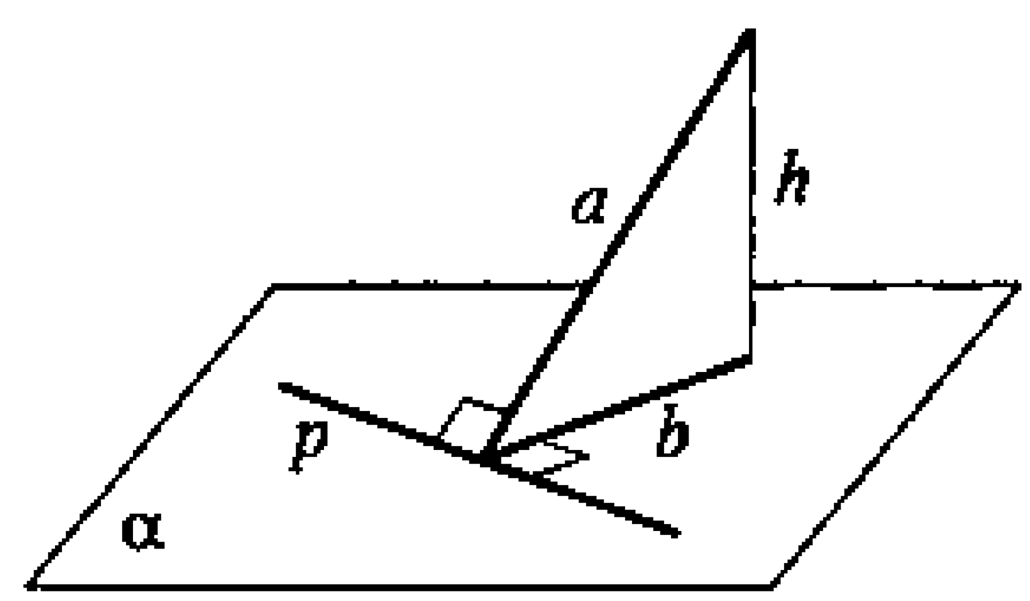


$\alpha \perp \beta$

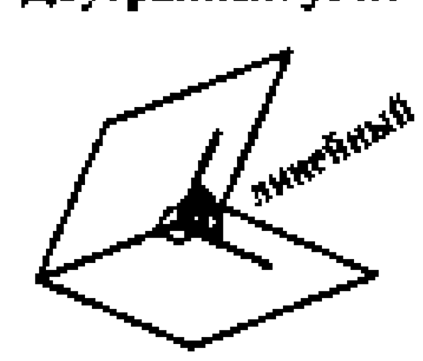
Теорема о трех перпендикулярах



φ – угол между прямой и плоскостью

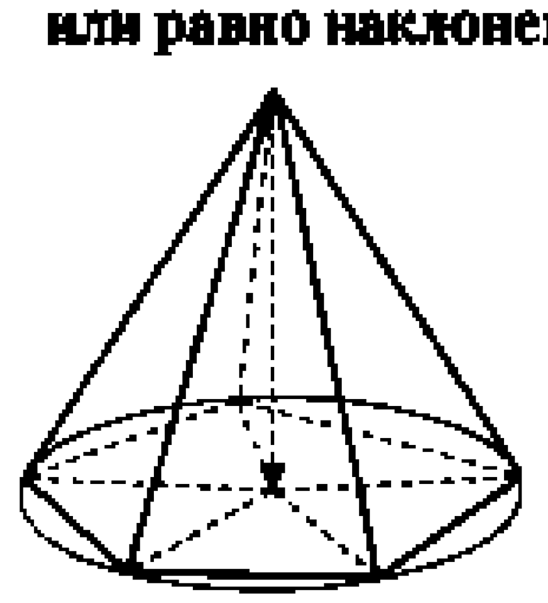


Двугранный угол



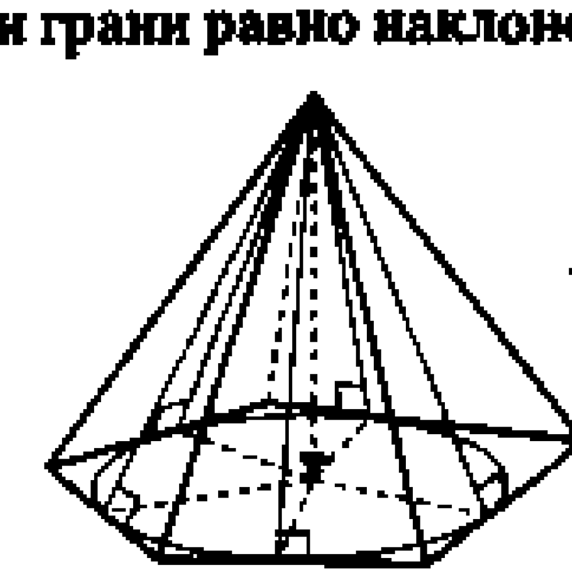
Угол между плоскостями

Если боковые ребра пирамиды равны или равно наклонены



вершина в центр описанной окружности

Если высоты боковых граней равны или грани равно наклонены



$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$$

вершина в центр вписанной окружности

ПОВТОРЕНИЕ. 10 класс

Плоскость 1. Три точки, не лежащие на одной прямой; прямая и не лежащая на ней точка; две пересекающиеся прямые; две параллельные прямые задают плоскость, причем только одну.

Скрещивающиеся прямые 2. Скрещивающимися называются прямые, которые не параллельны и не пересекаются. Если одна из прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые скрещиваются (признак скрещивающиеся прямых).

3. Угол между двумя скрещивающимися прямыми — это угол между двумя параллельными им и пересекающимися прямыми.

Признак параллельности 4. Если прямая параллельна прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Признак параллельности 5. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

6. Две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым.

7. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собой.

8. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности 9. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Признак перпендикулярности 10. Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теорема о трех перпедикулярах 11. Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. И наоборот, если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ее проекции.

12. Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Двугранный угол 13. Двугранный угол — это угол, образованный двумя полуплоскостями с общей границей. Линейный угол двугранного угла — это угол между двумя лучами, проведенными в каждой из полуплоскостей двугранного угла из одной точки на его ребре, перпендикулярно к этому ребру Величина двугранного угла определяется величиной его линейного угла.

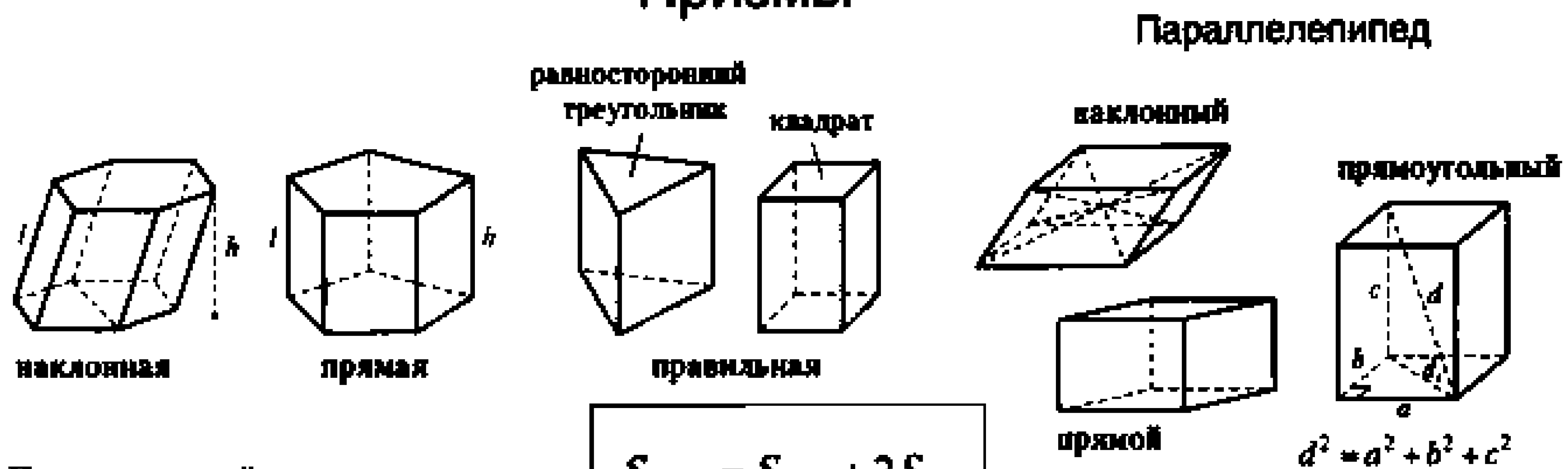
Равно наклоненные ребра 14. Если боковые ребра пирамиды равны или равно наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания. И наоборот.

Равно наклоненные грани 15. Если высоты боковых граней пирамиды, проведенные из вершины к ребру основания, равны или сами боковые грани равно наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание. И наоборот.

16. Если боковые грани наклонены к основанию под равными углами, равными β, то $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\beta}$.

Геометрия 11 класс

Призмы



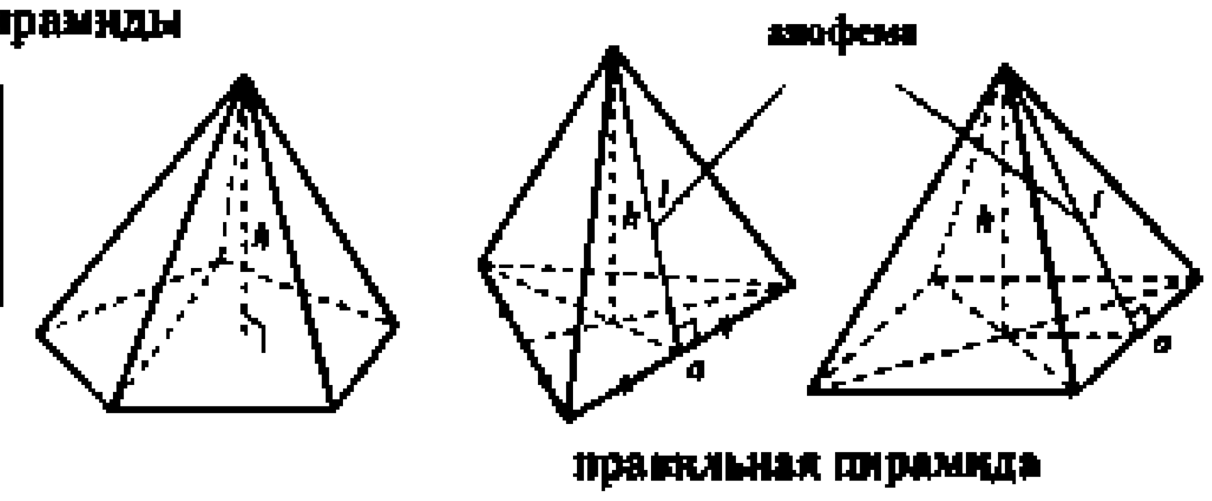
Площадь полной поверхности призмы $\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}}$

Объем призмы $\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$

Пирамиды

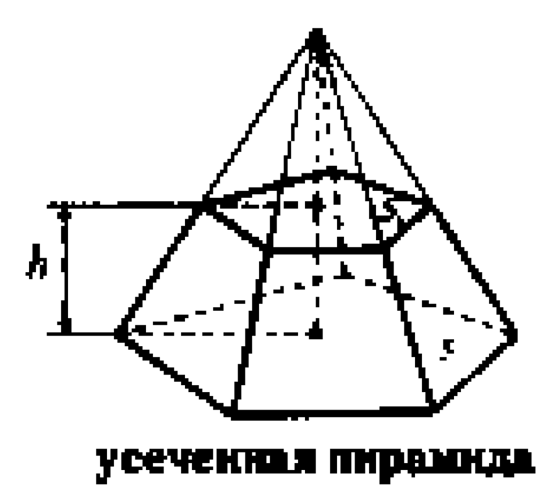
Площадь полной поверхности пирамиды

$$\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}}$$



Объем пирамиды

$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h}$$

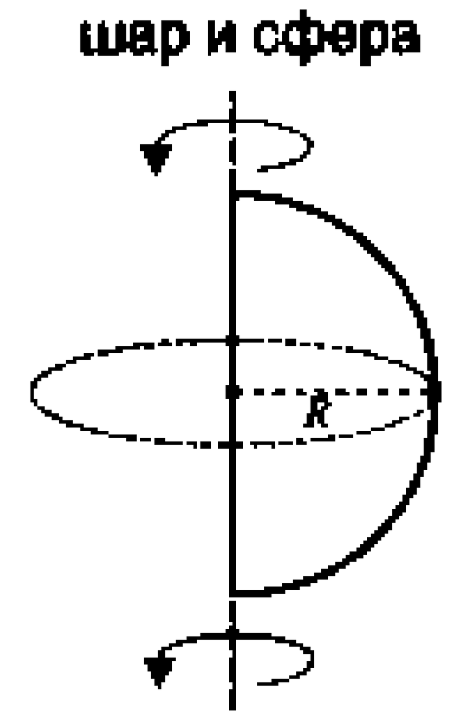


Объем усеченной пирамиды

$$\boxed{V_{\text{ус пир}} = V_1 - V_2} \qquad \boxed{V_{\text{ус пир}} = \frac{1}{3} h\,(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}$$

Тела вращения

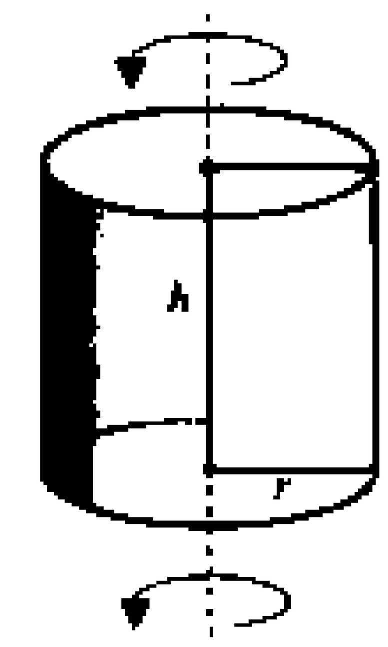
шар и сфера



$$S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

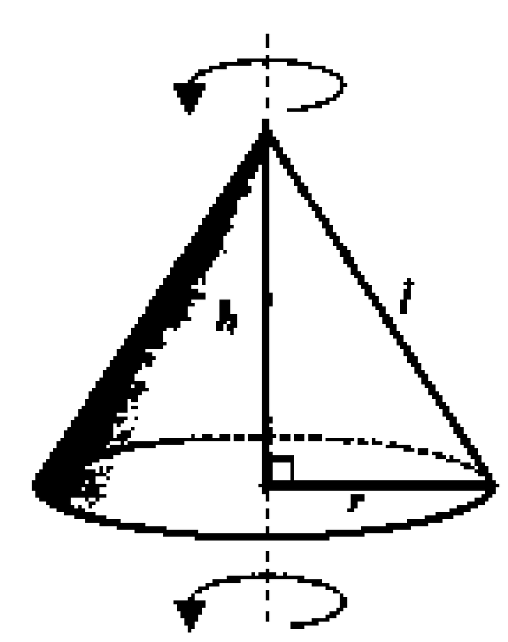
цилиндр



$$S_{\text{бок цил}} = 2\pi r h$$

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} h$$

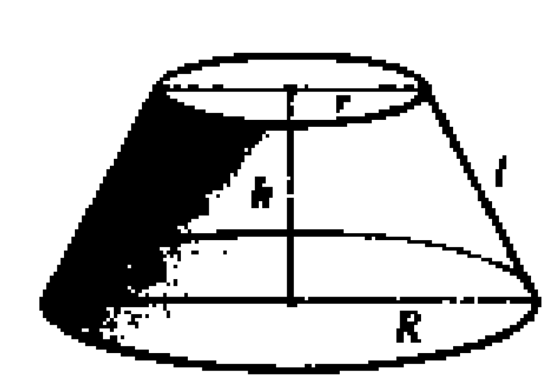
конус



$$S_{\text{бок кон}} = \pi r l$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

усеченный конус



$$S_{\text{бок ус кон}} = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l$$

$$V_{\text{ус кон}} = V_1 - V_2$$

ПОВТОРЕНИЕ. 11 класс

Призмы

1. Призма — это многогранник, у которого две грани (основания) — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, остальные n граней (боковые) — параллелограммы. Призмы подразделяются на треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от количества сторон основания. Высотой призмы называется перпендикуляр, опущенный из точки верхнего основания на плоскость нижнего.

Прямая и правильная призмы

2. Призма, у которой боковое ребро перпендикулярно основанию, называется прямой. Ее боковые грани — прямоугольники, и высота равна боковому ребру. Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной. Ее боковые грани — равные прямоугольники.

Параллелепипед

3. Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм. Противоположные боковые грани параллелепипеда равны.
Прямой параллелепипед — это параллелепипед, у которого боковое ребро перпендикулярно основанию.
Прямоугольный параллелепипед — это прямой параллелепипед, у которого в основании лежит прямоугольник. Диагональ прямоугольного параллелепипеда выражается через его измерения (ширину, длину и высоту) формулой $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Площадь боковой и полной поверхности призмы

4. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей ее боковых граней: $S_{бок} = S_1 + S_2 + ... + S_n$. Площадь поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и двух площадей оснований: $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

Объем призмы

5. Объем произвольной призмы равен произведению площади основания на высоту: $V_{призмы} = S_{осн} \cdot h$.

Пирамида

6. Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (основание) — n-угольник, а остальные n граней (боковые) — треугольники с общей вершиной. Пирамиды подразделяются на треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от количества сторон основания. Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на основание.

Правильная пирамида

7. Пирамида называется правильной, если ее боковые ребра равны, а в основании лежит правильный многоугольник. Основание высоты правильной пирамиды совпадает с центром ее основания, углы наклона боковых ребер к основанию равны, двугранные углы при основании равны, все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Площадь боковой и полной поверхности призмы

8. Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней: $S_{бок} = S_1 + S_2 + ... + S_n$.
Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и площади основания: $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.

Объем пирамиды

9. Объем произвольной пирамиды равен произведению одной трети площади основания на высоту: $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$.

Усеченная пирамида

10. Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и сечением, параллельным основанию. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции. Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и двух площадей оснований: $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн1} + S_{осн2}$. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов полной пирамиды и ее отсеченной части или находится по формуле $V_{ус\ пир} = \frac{1}{3} h \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.

Сфера

11. Сфера — это множество всех точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы. Радиусом сферы называется отрезок, соединяющий центр сферы с точкой на сфере, или длина этого отрезка. Хордой сферы называется отрезок, соединяющий две точки на сфере. Диаметр сферы — это хорда, которая проходит через центр сферы. Диаметр сферы равен двум радиусам сферы. Площадь сферы находится по формуле $S_{сф} = 4\pi R^2$.

Шар 12. Шаром называется часть пространства, ограниченная сферой, вместе с самой сферой и ее центром. Данная сфера называется поверхностью шара. Сечение шара с радиусом R плоскостью, проходящей через центр шара, называется большим кругом шара. Радиус, хорда, диаметр шара те же, что и его сферы. Объем шара находится по формуле $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Цилиндр 13. Цилиндром называется тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его сторон. Прямая вращения называется осью цилиндра. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник со сторонами $2r$ и l, где r — радиус основания цилиндра, l — его образующая. Образующая цилиндра – отрезок (обозначается l или L), перпендикулярный основаниям цилиндра и соединяющий точку окружности верхнего основания с точкой окружности нижнего основания. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований (обозначается h или H). Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок} = 2\pi rh$, объем цилиндра $V_{цил} = S_{осн}h = \pi r^2 h$.

Конус 14. Конусом называется тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, проходящей через один из его катетов. Прямая вращения называется осью конуса. Сечение конуса, проходящее через ось, называется осевым сечением. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник со стороной основания $2r$ и боковой стороной l, где r — радиус основания конуса, l — его образующая. Вершина осевого сечения является вершиной конуса. Образующая конуса (обозначается l или L) – отрезок, соединяющий вершину конуса и точку окружности основания. Высотой конуса называется расстояние от вершины конуса до плоскости основания (обозначается h или H). Высота конуса равна высоте осевого сечения, опущенной на основание.
Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок\ кон} = \pi rl$.
Объем цилиндра $S_{бок} = S_{осн}h = \pi r^2 h$.

Усеченный конус 15. Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, параллельным основанию, пересекающим высоту конуса. Усеченный конус имеет ось, совпадающую с осью конуса, осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция с основаниями $2R$ и $2r$ и боковой стороной, равной образующей усеченного конуса. Образующая усеченного конуса (обозначается l или L) – отрезок, лежащий на образующей полного конуса и соединяющий точки окружностей оснований.
Площадь боковой поверхности усеченного конуса
$S_{бок\ ус\ кон} = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot l = \pi l(R+r)$.
Объем усеченного конуса $V_{ус\ кон} = \frac{1}{3}\pi h \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{1}{3}\pi h \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

НУ ВОТ И ЗАКОНЧИЛАСЬ ГЕОМЕТРИЯ!

Вас ждут экзамены и Большая, Новая, Взрослая жизнь...

Вы молоды и честолюбивы. Но главное — вы умны! Ум — это не набор знаний, теорем и правил. Это умение использовать знания для достижения своих целей. Надеюсь, что способность рассуждать логически, которую вы приобрели вместе с этой книгой и с математикой вообще, поможет вам находить правильные решения жизненных задач и покорить свою вершину!

С уважением, ваш В. Казаков.

Вера Полозкова

***

Да, дерзость солнца бьет из наших глаз.
Мы избраны. В нас закипают соки.
Мы молоды, сильны и... одиноки.
Увы, все горы свернуты до нас.

Мы реактивны. Мы идем на взлет.
Мы верим, что в бою несокрушимы.
Но неприступны горные вершины
И на Олимпе нас никто не ждет.

Там стража грозно смотрит свысока.
Там блещет все. Там все решают деньги.
Покрыты красным бархатом ступеньки,
И поступь небожителей легка.

А в нас кипит честолюбивый яд.
И мучает, и не дает покоя,
И снится нам сиянье золотое,
Овации в ушах у нас гремят.

И, поправляя свой алмазный нимб,
Богини улыбаются лукаво...
Когда-нибудь и нас настигнет слава.
Когда-нибудь мы покорим Олимп.

ОТВЕТЫ

ТЕМА 1

1. 32 см^2.
2. 60 см^2.
3. 180 см^2.
4. 160 см^2.
5. 30 см^2.
6. 35 см^2.
7*. 6 см.
8*. 144 см^2.
9. 13.
10. 8.
11. 24.
12. 9.
13. 24 см^2.
14. 80.
15. 5.
16. 6.
17. 14.
18. 18.
19. 100.
20. 24.
21. 16.
22. 27.
23*. 5.
24*. 3.
25. 54 см^2.
26. 8.
27. 4.
28. 8.
29. 248.
30. 4.
31*. 210.
32*. 168.
33. 420.
34. 144.
35*. 32°.
36*. 90°.
37*. 120.
38*. 240.
39*. 25.
40*. 5.
41. 320.
42. 240.
43*. 96.
44*. 900.
45*. 300.
46*. 400.
47*. 144.
48*. 80.
49*. 17.
50*. 12.
51*. 30 см^2.
52*. 120 см^2.
53*. 400.
54*. 72.
55*. 48.
56*. 180.
57. 36.
58. 264.
59. 10 см.
60. 7.
61*. 10 см.
62*. 5.
63*. 120°.
64*. 24.
65. 80.
66. 45.
67. 105.
68. 8.
69. 15 см^2.
70. 9 см^2.
71*. 36.
72*. 192.
73. 9.
74. 60.
75. 20°.
76. 75°.
77. 8.
78. 21.
79*. 10.
80*. 18.
81. 70.
82. 72.
83. 4.
84. 72.
85. 3 см.
86. 2 см.
87*. 144.
88*. 16.
89. 16.
90. 8.
91. 5.
92. 3.
93*. 10.
94*. 42.
95*. 6.
96*. 56°.
97. 27 см^2.
98. 8 см^2.
99*. 18.
100*. 16.
101. 132°.
102. 68°.
103*. 150 см^2.
104*. 160 см^2.
105*. 26.
106*. 100.
107*. 40.
108*. 12.
109. 36 см^2.
110. 80 см^2.
111*. 3.
112*. 6.
113. 27.
114. 4.
115. 9.
116. 5.
117. 432.
118. 162.
119. 18.
120. 54.
121. 3.
122. 2.
123. 9.
124. 9.
125. 90°.
126. 8.
127. 144.
128. 18.

ТЕМА 2

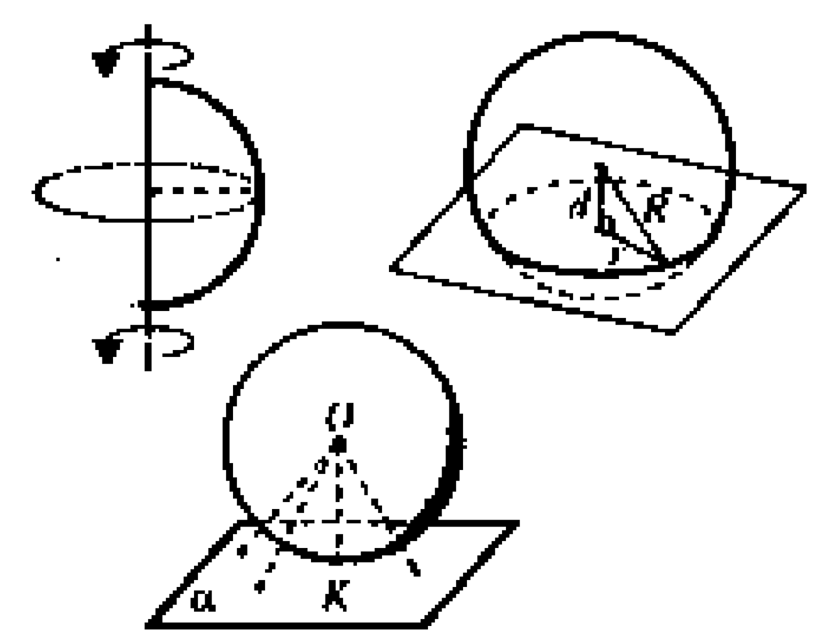
1. 125.
2. 27.
3. 8 см^3.
4. 150 см^2.
5. 60.
6. 120.
7. 240 см^2.
8. 14 см.
9. $\sqrt{3}$ см.
10. 8 см.
11. 144.
12. 18.
13. 96 см^2.
14. 4 см^3.
15. 540.
16. 600.
17. 4.
18. 9.
19. 144.
20. 180.
21. 24 см^3.
22. 40 см^3.
23*. $2\sqrt{6}$.
24*. 8.
25. 100.
26. 45°.
27. 8.
28. 150.
29. 40.
30. 36.
31*. 16.
32*. 256.
33. 96.
34. 4.
35. 24.
36. 15
37. 60.
38. 72.
39. 60.
40. 6.
41. 2.
42. 1.
43. 210.
44. 18.
45. 18.
46. 5.
47*. 72.
48*. 16.
49. 30.
50. 8.
51. 384.
52. 30°.
53. 224.
54. 4.
55*. 3.
56*. 324.
57. 240.
58. 280.
59. 576.
60. 360.
61. 189.
62. 36.
63. 96.
64. 36.
65. 60.
66. 4.
67. 48.
68. 18.
69. 80.
70. 12.
71. 243.
72. 15.
73. 16.
74. 6.
75. 32.
76. 200.
77. 18.
78. 81.
79. 32.
80. 12.
81. 18.
82. 18.
83. 32.
84. 120.
85. 9.
86. 72.
87*. 240.
88*. 36.
89. 768 см^3.
90. 135 см^3.
91. 16.
92. 60.
93. 16.
94. 60.
95*. 84.
96*. 28.
97. 40.
98. 9.
99. 18.
100. 288.
101. 48.
102. 36.
103. 40.
104. 54.
105*. 19.
106*. 74.
107*. 21.
108*. 76.
109*. 8 : 1.
110*. 3.
111*. 63.
112*. 196.
113. 40.
114. 320.
115. 18.
116. 16.
117*. 8.
118*. 54.
119. 20.
120. 4.

ТЕМА 3

1. 9.
2. 8.
3. 12.
4. 5.
5. 4.
6. 2.
7. 10.
8. 6.
9. 13.
10. 6.
11. 3.
12. 7.
13. 25.
14. 5.
15. 136π.
16. 6.
17. 12.
18. 15.
19. 24.
20. 12.
21. 3.
22. 10.
23. 6.
24. 24.
25. 2) 9.
26. 3) 12.
27. 1) 36π.
28. 1) 9π.
29. 2.
30. 2.
31. 4.
32. 18.
33. 10.
34. 15.
35. 36π.
36. 18.
37. 2) 100π.
38. 3) 10.
39. 20.
40. 3.
41. 1 : 4.
42. 4.
43. 72.
44. 64.
45. 24π.
46. 80π.
47. 5.
48. 2.
49. 4) 360π.
50. 2) 150π.
51. 1) 54π.
52. 3) 28.
53. 45π.
54. 20π.
55. 36.
56. 45.
57. 1) 8.
58. 36π.
59. 9.
60. 36.
61. 17.
62. 2.
63*. 8.
64*. 819.
65. 60.
66. 24.
67. 3) $2\sqrt{12}$.
68. 2) 18π.
69. 90°.
70. 9π.
71. 3) $9\sqrt{3}$.
72. 4) 12π.
73*. 24.
74*. 672.
75. 12π.
76. 65π.
77*. 12.
78*. 96.
79. 75π.
80. 2π.
81*. 180°.
82*. 3.
83. 24.
84. 40.
85. 12.
86. 10.
87. 240π.
88. 12.
89. 1) 28π.
90. 2) 38π.
91. 52π.
92. 4.
93*. 196.
94*. 21.
95. 21π.
96. 18.

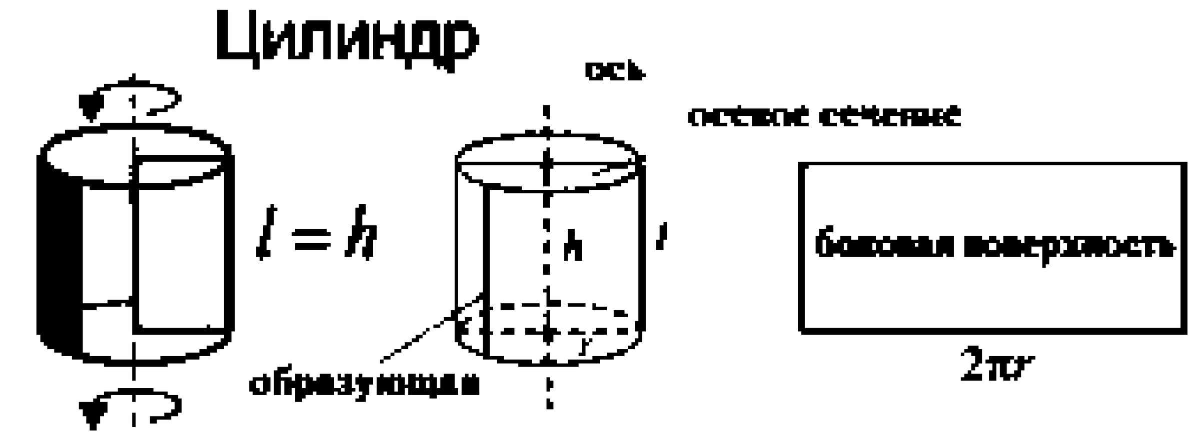
Тема 3. «Тела вращения» № 3

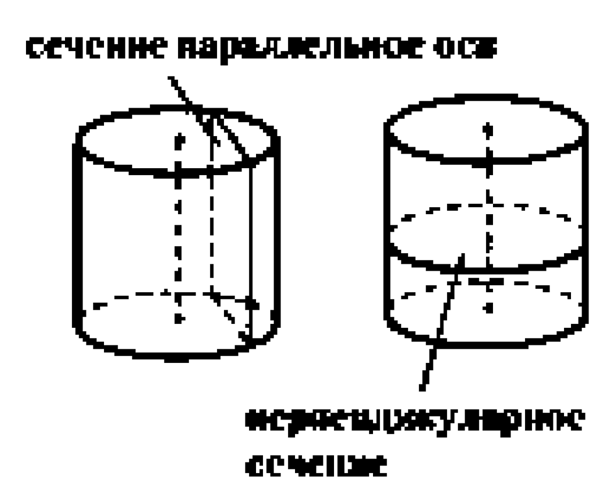
Сфера и шар



$$S_ш = 4\pi R^2 \qquad V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Цилиндр

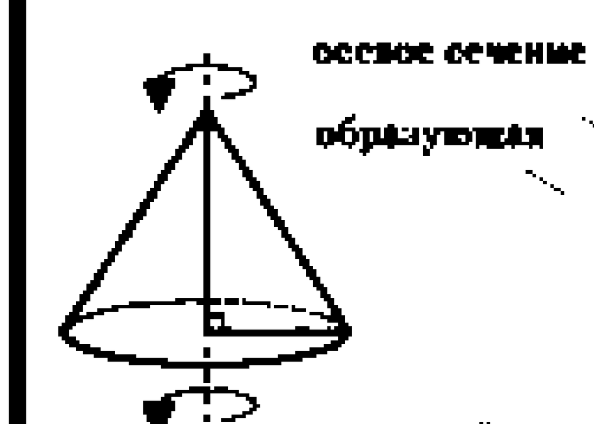


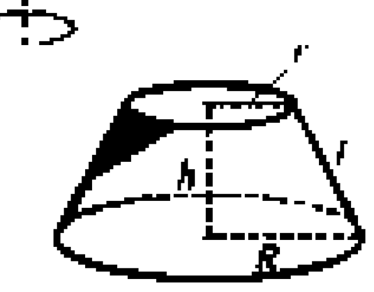


$$S_{бок\ цил} = 2\pi rh$$

$$S_{полн\ цил} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$V_{цил} = S_{осн}h = \pi r^2 h$$

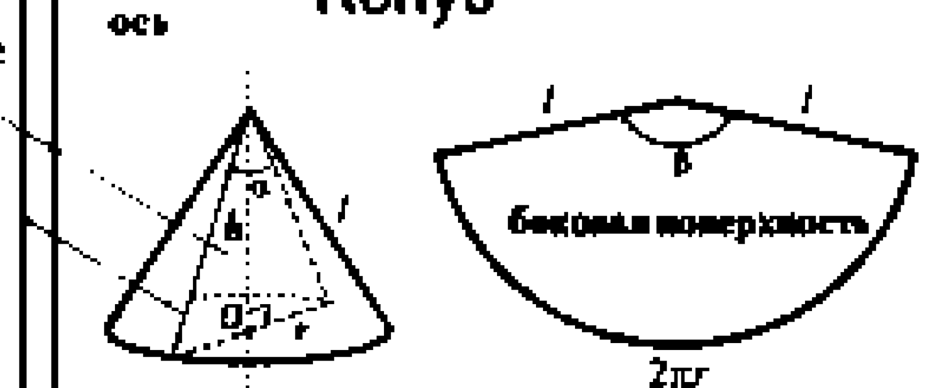




$$V_{ус\ кон} = V_1 - V_2$$

$$S_{бок\ ус\ кон} = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l$$

Конус



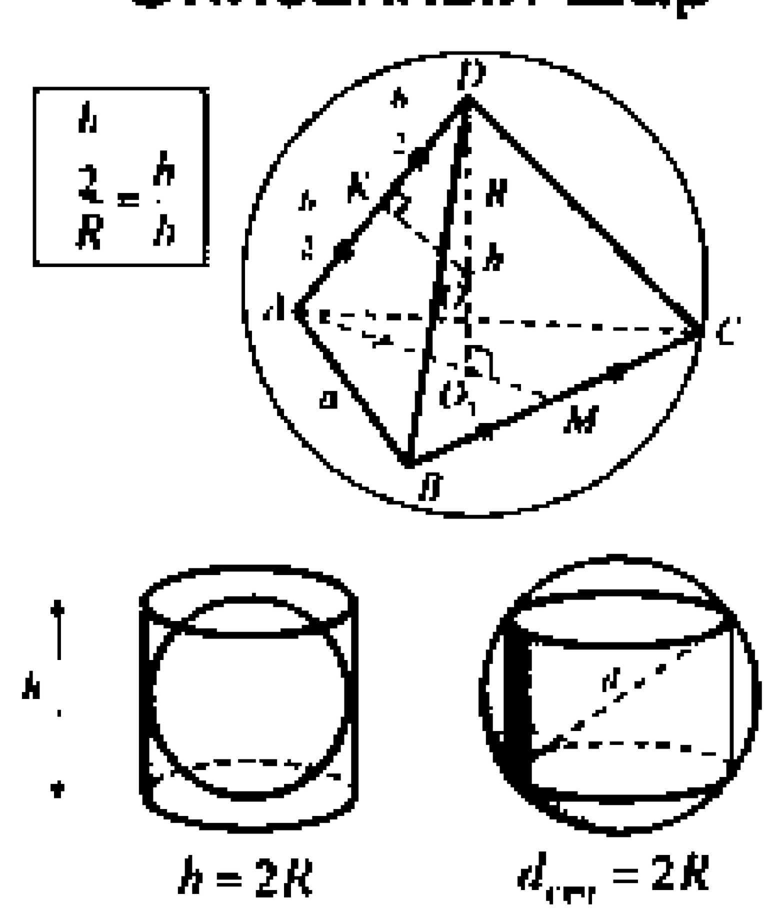
$$S_{бок\ кон} = \pi rl$$

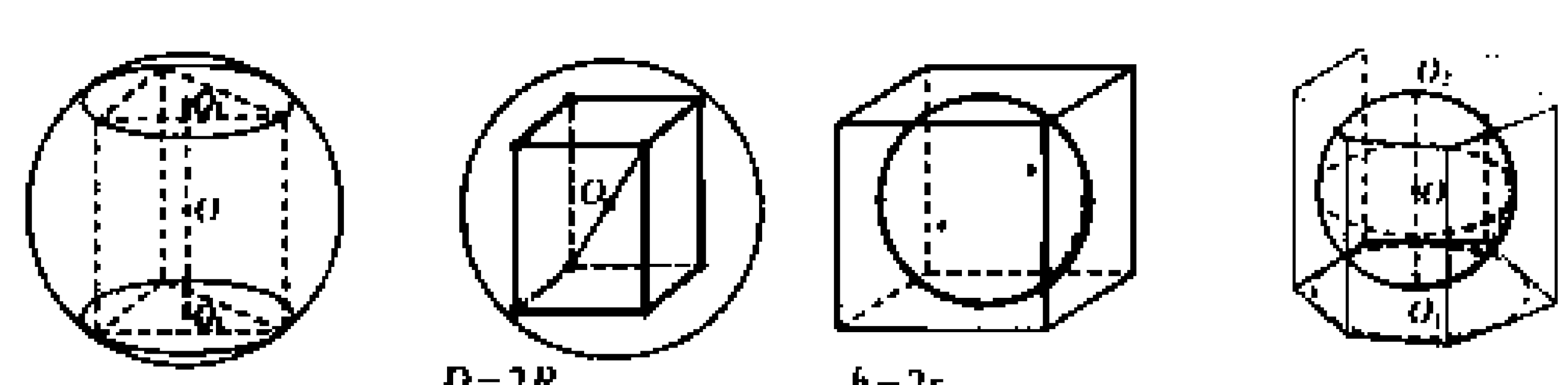
$$S_{полн\ кон} = S_{бок} + S_{осн}$$

$$V_{кон} = \frac{1}{3}S_{осн}h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Тема 4. «Комбинация тел» № 4

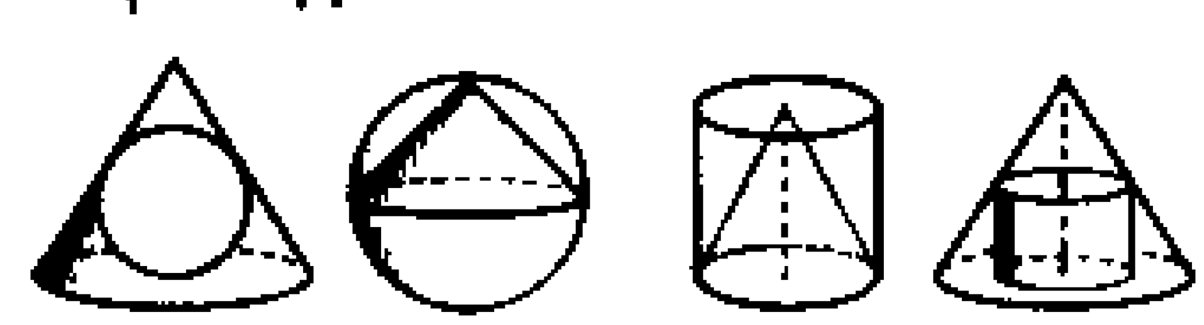
Описанный шар

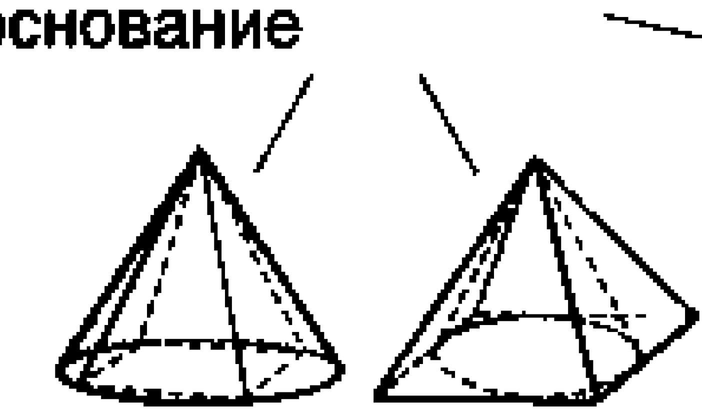




Вписанное и описанное основание

Проводим осевое сечение!





Вписанный шар